FONDO PIZZOFALCONE

22 A 8

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

Palchetto

Num.° d' ordine

122 B 9

NAZIONALE
B. Prov.
VITT. EM. III
1458
NAPOLI

Digitized by Google

B. Sur.
Il
1458

# *ÉLÉMENS*

# D'ARITHMÉTIQUE

## ET

# *D'ALGÈBRE.*

---

TOME SECOND.

---

Digitized by Google

610691

# ÉLÉMENS D'ALGEBRE,

## PAR CLAIRAUT,

## SIXIEME EDITION,

Avec des Notes et des Additions très-étendues, par le citoyen GARNIER, professeur d'analyse à l'Ecole Polytechnique. (*Avec Figures.*)

*Précédés d'un traité d'Arithmétique, par* THÉVENEAU, *avec une Instruction sur les nouveaux poids et Mesures.*

## TOME SECOND.

BIBLIOTECA PROVINCIALE DI NAPOLI

A PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, rue Poupée-André-des-Arts, n°. 5.

AN X. = 1801.

## MATHÉMATIQUES.

*Cours élémentaire et complet de Mathématiques-pures, rédigé par* LA CAILLE, *augmenté par* MARIE, *et éclairci par* TREVANEAU. Près de 200 notes ajoutées à la fin de cet ouvrage, le mettent à la portée de tous les étudians.

Cette nouvelle et seconde édition a été revue avec le plus grand soin par le cit. *Theveneau ;* elle est imprimée en caractères *Didot*, beau papier, et enrichie de douze planches. Un gros vol. in-8°. de 556 pages. Prix, broché, 8 fr. franc de port par la poste.

On n'apprendra pas avec moins de satisfaction la réimpression du *Cours de* BEZOUT, à l'usage de la marine ; mais ce qui doit ajouter un nouveau prix à cette édition, c'est que le citoyen GARNIER, *examinateur des aspirans à l'école polytechnique, et aujourd'hui professeur de cette école*, a bien voulu se charger de la correction des épreuves, et ajouter des notes, qui sont des théories complettes et des développemens, tels que les titres l'indiquent.

La première partie, contenant l'Arithmétique, renferme aussi l'application des premieres regles de l'arithmétique aux nouveaux poids et aux nouvelles mesures, leurs nomenclatures et leurs valeurs ; 1 vol. 8°. Prix 3 fr. 50 cent. franc de port.

La seconde contient les Elémens de géométrie rectiligne et la trigonométrie sphérique ; 1 vol. 8°. Prix 5 fr. franc de port.

La troisieme contient l'Algebre, 1 vol. 8°. Prix 6 fr. 50 c. franc de port. —— Ces volumes se vendent séparément.

La Méchanique est enrichie de notes très-étendues sur le calcul différentiel et sur le calcul intégral, formant 3 volumes qui se vendent ensemble. Le prix est de 18 fr. franc de port.

La Navigation, augmentée de deux Tables des logarithmes des nombres, et ceux des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes, beaucoup plus exactes et plus étendues que les anciennes, est de 6 fr. franc de port.

Les trois premiers vol., qui sont l'Arithmétique, la Géometrie et l'Algèbre, viennent d'être réimprimés avec de fortes additions, et un quatrième vol. qui contient le *Cours d'analyse du calcul différentiel et intégral*, suivi à l'Ecole polytechnique ; il se vend séparément 6 fr. pour Paris, et franc de port, 7 fr. 50 c. Les 4 vol., franc de port, 22 francs.

Cours de Mathématiques à l'usage des élèves du génie ; par le citoyen Bossut, 1 vol. in-8. contenant l'Arithmétique et l'Algebre, franc de port, 6 fr. 50 c.

Idem, Géométrie, 1 vol. in-8, franc de port, 6 fr. 50 c.

Récréations de mathématiques de Guyot, nouvelle édition, 3 v. in-8. avec 100 figures, franc de port, 20 fr.

Tables portatives de logarithmes, contenant les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 108000, par Callet, 1 v. in-8. 16 fr

Ecoles normales, 9 vol. in-8., et un cahier de 28 planches ; prix pour Paris, 45 fr.

De la résolution des Equations numériques de tous les degrés, par Lagrange, in-4, 9 fr.

Elémens d'Algèbre, par Léonard Euler, traduit de l'allemand, avec des notes et des additions par Lagrange ; nouvelle Edition, revue et corrigée ; 2 vol. in-8, 11 fr. franc de port.

Géométrie-pratique, par Dupuy, professeur de l'école d'artillerie, à Valence, 2 vol. in-8, 11 fr. franc de port.

Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral, par Lacroix, 5 vol. in-4, prix, pour Paris, 48 fr.

Système du Monde, par P. S. Laplace, membre de l'Institut, 2 vol. in-8, 10 fr, franc de port.

Lesdits ouvrages se trouvent, à Paris, chez COURCIER, imprimeur-libraire, rue Poupée, n°. 5, qui se charge de tous les envois de livres, principalement de Mathématiques.

BIBLIOTECA NAPOLI



lorsqu'elles n'ont que deux termes, ou lorsqu'en ayant trois, elles peuvent se réduire à celles qui n'en ont que deux, par la méthode des opérations du deuxième degré, avec differentes opérations relatives aux équations, comme l'élevation des puissances, l'extraction des racines, la réduction des quantités radicales, etc. 98
*I. Des équations du troisième degré à deux termes,* ibid.
*On met un 3 sur le caractère √ pour exprimer la racine cube,* 99
*II. Les radicaux cubes ne peuvent avoir qu'un signe à la fois,* ibid.
*IV. Comment on multiplie les radicaux cubes,* 101
*V. Racines de l'équation du 3e. degré à deux termes,* ibid.
*VI. Des équations à deux termes et d'un degré quelconque,* ibid.
*Ces équations ne sauroient jamais avoir plus de deux racines réelles,* 102
*VII. Réflexions sur l'élévation des puissances,* 103
*VIII. Application des réflexions précédentes, à l'extraction des racines,* 104
*IX. De l'extraction des racines, lorsque les puissances sont incomplettes,* 105
*XI. En quoi consiste le cube d'un binome,* 107
*XII. Méthode qu'il faut suivre pour prendre la racine cube des quantités complexes,* ibid.
*XIII. Premier exemple,* 108
*XIV. Second exemple,* 109
*XV. Additions et soustractions des quantités radicales de toute espèce,* 110
*XVI. Multiplication et division des quantités radicales qui ont les mêmes exposans,* 111
*Exemples,* ibid.
*XVII. Pour faire ces opérations sur les quantités radicales de différens exposans, il faut les réduire au même exposant,* ibid.
*Méthode pour cette réduction,* 112
*XVIII. Autre manière de faire les opérations précédentes,* 113
*XIX. Ce que c'est qu'une puissance fractionnaire,* 117
*Ce que c'est qu'une puissance négative,* 118
*Ce que c'est que la puissance 0,* ibid.
*XX. Des équations à trois termes qui se résolvent par la méthode du second degré,* 120
*XXI. Exemple de la méthode précédente,* 121
*XXII. Autre exemple,* 122
*XXIII. Troisième exemple,* ibid.
*XXIV. Quatrième exemple.* ibid.
*XXV. Méthode pour trouver les racines quarrées des quantités en partie commensurables, et en partie radicales,* 124
*XXVII. Application de la méthode précédente à un exemple,* 126
*XXX. Troisième exemple,* 128
*Méthode pour trouver la racine cube des quantités en partie commensurables et en partie incommensurables,* 129
*XXXII. Application de la méthode précédente à un exemple,* 132
*XXXIII. Autre exemple,* 133
*XXXV. Méthode pour trouver les racines cubes des quantités numériques en parties commensurables, etc.* 135
*XXXVI. Application de la méthode précédente à un exemple,* 137
*XXXVII. Autre exemple,* 138
*XXXVIII. Simplification de la méthode précédente,* 139
*XXXIX. Application de la nouvelle méthode,* 140
*XL. Cette nouvelle méthode pourroit être fautive dans les cas où A et B sont des signes différens,* ibid.
*Ce qu'il faut faire en ce cas,* 141
*XLI. Cas où la méthode précédente pourroit induire en erreur,* 143

*Moyens de s'en garantir*, ibid.
*XLIII. Ce qu'il faut faire quand la racine cube doit être la somme de deux radicaux*, 146
*XLIV. Comment on prend la racine quatrième des quantités de même espèce que les précédentes*, ibid.
*XLV. Ce qu'il faut faire toutes les fois que l'exposant de la racine est pair*, ibid.
*XLVI. Pour les racines cinquième*, 147
*XLVIII. De la manière d'élever un binome à une puissance quelconque*, 148
*Formule générale pour l'élévation de* $p + q$ *à la puissance* m, 153
*L. Démonstration du théorème de l'article XLVII*, 154
*LI. Application de la formule précédente à un exemple*, ibid.
*LII. Comment on applique la formule précédente aux quantités de plus de deux termes*, 156
*LIV. Où l'on fait voir que la formule précédente a lieu encore lorsque l'exposant est fractionnaire*, 158
*LV. La même formule va encore aux puissances négatives*, 160
*LVI. Exemple d'une racine quarrée prise par la formation de l'élévation des puissances*, 161
*LVII. Lorsque les quantités n'ont point de racines exactes, on en trouve d'approchées par la méthode précédente*, 163
*Exemple*, ibid.
*Ce que c'est qu'une série ou suite infinie*, ibid.
*LVIII. Toutes sortes de quantités peuvent être réduites en séries par la formule précédente*, 164
CINQUIEME PARTIE. Résolution des équations du troisième et du quatrième degré, 166
*I. Equation la plus composée du troisième degré*, ibid.
*II. Transformation par laquelle on fait evanouir un terme quelconque de cette équation*, 167
*III. Transformation précédente appliquée à une équation du quatrième degré*, 169
*IV. Evanouissement du second terme dans une équation du cinquième degré*, 170
*V. Dans une équation du degré quelconque* m, ibid.
*VI. Résolution de l'équation générale* $x^3 + px + q = 0$, ibid.
*VII. La formule précédente ne donne qu'une des trois racines*, 172
*Manière d'avoir les deux autres*, 173
*VIII. Cas où la formule précédente ne sauroit faire connoître* x *à cause des imaginaires qu'elle renferme*, 174
*IX. On démontre cependant que dans ce cas* x *est réel*, 175
*Par la même méthode on trouvera une valeur approchée de* x, 176
*XI. Les deux autres valeurs de* x *sont aussi réelles dans le même cas*, 177
*XII. Comment des racines de l'équation* $x^3 + px + q = 0$, *on tire celles de l'équation* $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$, 178
*XIII. Une équation du troisième degré a ses trois racines réelles, ou une réelle avec deux imaginaires*, 179
*XIV. Comment on distingue ces cas*, ibid.
*XV. Quelles sont les racines, lorsque* $\frac{1}{27} p^3$ *est négatif et* $= \frac{1}{2} qq$, 180
*XVI. Application des méthodes précédentes à un exemple*, 181
*XVII. Autre exemple contenant une équation du sixième degré qui se réduit au troisième*, 182
*Equations plus élevées qui s'y réduiroient aussi*, 183
*XIX. Quatrième exemple dans lequel la formule de l'art. VI est insuffisante*, 184
*Application de la méthode de l'article X pour approcher des racines*, ibid.
*Cas irréductible du troisième degré*, 186
*XX. Inconvénient de l'approximation enseignée, article X*, ibid.
*XXI. Autre méthode d'approximation générale et facile dans la pratique*, 187
*La méthode qu'on vient d'enseigner donne d'abord* x *à un millième près*, 189

# TABLE DE L'ALGÈBRE DE CLAIRAUT.


DE la résolution des équations du second degré. page 1
I. Problème qui contient dans sa généralité des problèmes de tous les degrés, 2
II. Equation du problème précédent pour le cas du second degré. 3
V. Manière d'arriver à la solution générale des équations du second degré, 4
Le signe √ indique la racine quarrée, 6
VI. La racine quarrée d'une quantité est aussi bien négative que positive, 7
Une équation du second degré a deux racines, c'est-à-dire, deux valeurs d'x, ibid
VII. Formule contenant ces deux racines, 8.
VIII. Application de la formule précédente à l'équation de l'art. II, ibid.
IX. Réduction de la valeur d'x, en formant la racine du produit par celle des produisans, ibid.
X. Exemple du problème, 9
XI. Autre exemple, 10
XII. Troisième exemple qui, demandant la racine d'une quantité négative, est impossible, 11
Ces racines sont dites imaginaires, ibid.
XIII. Quelles sont les équations du second degré, dont les racines sont imaginaires, ibid.
XIV. Résolution des équations du second degré sans les comparer à la formule générale, 12
XV. Autre problème du second degré, ibid.
XVI. Des deux valeurs précédentes l'une est nécessairement positive, l'autre négative, 15
XVII. Usage de la valeur négative, ibid.
XX. Nouveaux exemples de résolutions d'équations du second degré, 18
XXI. Procédé de l'extraction de la racine quarrée expliqué sur un exemple, 21
XXII. Autre exemple d'extraction de racine quarrée, 22
XXIII. Exemples de réduction de quantités radicales, 24
XXIV. Les quantités qui n'ont point de racines exactes sont dites incommensurables ou irrationnelles, ibid.
L'addition et la soustraction de ces quantités ne supposent que leur réduction, ibid.
XXV. Multiplication des incommensurables, 25
XXVI. Division des incommensurables, 27
XXVII. Problème du second degré qui demande plusieurs inconnues, 28
XXVII. Autre manière de résoudre les équations précédentes, 30
XXIX. Exemple d'équation du second degré à deux inconnues plus compliqué que le premier, 31
Equation finale à laquelle conduisent ces équations 32
XXX. Autre manière de traiter le même exemple, ibid.
XXXII. y étant à un degré quelconque, et x seulement au second degré, on traiteroit de même les deux équations, 34
XXXIII. Ce qu'il faudroit faire pour arriver à l'équation finale, lorsque x seroit au troisième degré, 35
XXXIV. Ce seroit la même chose si x montoit à des degrés plus élevés, 36
XXXV. S'il y avoit plus de deux inconnues, on parviendroit de même à l'équation finale, 36
TROISIEME PARTIE, où l'on donne quelques principes généraux pour les équations de tous les degrés, avec la méthode de tirer de ces équations celles du premier et du second degré qu'elles peuvent renfermer, 39
I. Manière de former une équation par le moyen de ces racines, 40
II. Une équation a autant de racines que de degrés, 41
III. Propriété des équations de tous les degrés, ibid.

*IV. Dans une équation sans second terme, la somme des racines positives est égale à celle des négatives.* 42
*V. Une équation qui n'a point de terme connu a au moins une racine égale à zéro.* 43
*VI. Conditions qu'il faut observer dans une équation pour y trouver les propriétés précédentes.* ibid.
*VII. Méthode pour avoir les racines commensurables d'une équation.* 44
*VIII. Dans une équation dont tous les coefficiens sont des entiers, l'inconnue ne sauroit être une fraction.* 45
*IX. Transformation par laquelle on fait évanouir les fractions d'une équation quelconque.* 46
*X. Par cette transformation, la méthode précédente s'applique aux équations fractionnaires.* 47
*XI. Inconvénient de la méthode précédente.* ibid.
*XII. Réflexions qui ont servi à perfectionner cette méthode.* 48
*XIV. Application de la méthode précédente à un exemple.* 49
*XVI. Manière d'avoir tous les diviseurs d'un nombre.* 56
*XVII. Autre exemple de la méthode de trouver les racines commensurables.* 54
*XVIII. Troisième application de la méthode de trouver les racines commensurables.* 57
*XIX. Méthode pour trouver les équations du second degré commensurables dans une équation donnée.* 59
*XX. Application de la méthode précédente.* 62
*XXI. Autre application de la méthode précédente.* 66
*XXII. Méthode pour trouver les diviseurs du premier degré, lorsque l'x doit avoir un coefficient.* 69
*XXIII. Application de cette méthode à un exemple.* 71
*XXIV. Méthode pour trouver les diviseurs du 2e degré, lorsque l'x doit avoir un coefficient.* 73
*XXV. Application de cette méthode à un exemple.* 74
*XXVI. Toute quantité donnée qui ne monte pas au sixième degré, qui a des diviseurs, en doit avoir d'un degré moins élevé que le troisième.* 75
*XXVII. Si la quantité monte au sixième degré ou au-delà, elle pourroit n'avoir de diviseurs que de trois, ou de plus de trois dimensions.* 76
*XXIX. Méthode pour trouver tous les diviseurs à deux lettres dans une quantité qui en a trois.* 78
*XXX. Exemple.* ibid.
*XXXI. Autre exemple.* 79
*XXXII. Méthode pour trouver les diviseurs de trois lettres et du premier degré.* ibid.
*XXXIII. Application de la méthode précédente à un exemple.* 81
*XXXIV. Autre exemple.* 82
*XXXV. Troisième exemple, où l'on trouve les diviseurs à deux lettres en même tems que ceux à trois.* 84
*XXXVI. Méthode pour trouver les diviseurs du second degré et à trois lettres.* 87
*XXXVII. Application de cette méthode à un exemple.* 88
*XXXVIII Autre exemple.* 91
*Application de la méthode donnée art. XIV, pour trouver tous les diviseurs d'un nombre, aux quantités littérales.* ibid.
*XL. Ce qu'il faut faire pour trouver des diviseurs des quantités qui ne sont pas homogènes.* 96
*LXI. Cas où le diviseur se trouve plus facilement que par les méthodes précédentes.* 97
QUATRIEME PARTIE. Résolution des équations des degrés quelconques

# DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

En écrivant ces Notes, j'ai eu particulièrement en vue l'instruction des Aspirans à l'Ecole Polytechnique : or pour qu'un candidat soit suffisamment préparé, je pense qu'il faut non-seulement qu'il possède toutes les connoissances énumérées dans le programme d'admission, mais encore qu'il ne soit pas étranger à l'analyse algébrique qui fait partie de l'enseignement mathématique de la première division de l'Ecole : car pour dire de tel Elève qu'il convient à l'Ecole, il faut avoir reconnu que l'Ecole lui convient, et on ne peut obtenir cette donnée, qu'en l'essayant sur l'instruction intérieure : c'est ce qu'on s'est proposé en exigeant de l'analyse géométrique et la statique qu'on professe à l'Ecole. Qui ne sait d'ailleurs que tel Elève a bien entendu les élémens, et a complétement satisfait aux examens, qui, admis à l'Ecole, n'a pu suivre l'instruction sans une continuité d'efforts presque surnaturels, ou qui même a échoué ; et il est encore arrivé que tel autre dont le début à l'Ecole a été médiocre, a gagné de vîtesse ceux qui l'avoient devancé dans les élémens, et a jeté le plus grand éclat par la suite. Comment un Instituteur pourra-t-il prévoir ces phénomènes, si ce n'est en conduisant son Elève au de-là du terme commun, et l'associant en quelque sorte aux travaux intérieurs. D'ailleurs, en mathématiques, aller au-delà, c'est pénétrer plus avant, ce n'est pas s'étendre dans deux dimensions seulement, mais dans trois. Si ce que je viens d'énoncer avoit besoin de preuves, je dirois qu'il arrive fréquemment que telle difficulté est levée, non parce qu'on a lutté contre, mais seulement parce qu'on a été plus loin, et en cela, j'en appelle à l'expérience de tous ceux qui ont étudié avec art : plus d'une fois sans insister d'avantage sur ce qu'ils

*XXIII. Application de cette méthode à un autre exemple*, 190
*XXIV. Autre exemple*, 191
*XXV. Résolution générale de l'equation du quatrième degré*, 192
*La résolution d'une équation du quatrième degré dépend d'une équation du troisième*, 193
*Cette équation s'appelle la réduite*, ibid.
*XXVI. Dans le quatrième degré on peut exprimer les quatre racines par une seule formule*, 194
*XXVIII. On arrive aux mêmes racines d'une équation du quatrième degré, quelque soit celle des racines de la réduite qu'on ait prise*, 196
*XXIX. Les racines d'une équation du quatrième degré sont toutes réelles ou toutes imaginaires, ou deux réelles et deux imaginaires*, 199
*XXX. Les racines imaginaires du quatrième degré sont de même nature que celles du second*, 200
*XXXI. Lorsque des quatre racines deux sont réelles et deux sont imaginaires, on résout exactement l'équation*, 201
*C'est le contraire, lorsque les quatre racines sont toutes réelles ou toutes imaginaires*, ibid.
*XXXII. Manière de distinguer le cas des quatre racines réelles de celui des quatre imaginaires*, 202
*Conditions des quatre racines réelles*, 203
*Conditions des quatre racines imaginaires*, ibid.
*XXXIII. Toute équation du quatrième degré sans second terme, et qui a le troisième positif, a des racines imaginaires*, 204
*XXXV. Avantage qu'on trouve à chercher les diviseurs commensurables dans la réduite plutôt que dans la proposée*, 205
*XXXVI. Manière de connoître les équations du quatrième degré, dont les racines n'ont point d'autres radicaux que ceux du second degré*, 207
*XXXVII. Ce qu'il faut faire pour avoir les valeurs approchées des quatre racines, lorsqu'elles sont réelles*, 208
*XXXVIII. Application des méthodes précédentes à un exemple*, ibid.
*XXXIX. Autre exemple*, 210
*XL. Troisième exemple*, 211
*XLI. Quatrième exemple*, 214
*XLII. Cinquième exemple*, ibid.
*XLIII. Sixième exemple*, 216
*XLIV. Septième exemple*, ibid.
*XLV. Manière de faire évanouir les radicaux d'une équation quelconque*, 218
*Exemple*, ibid.

Fin de la Table de l'Algèbre de Clairaut.

# TABLE DES NOTES.

*REGLES des signes dans la soustraction et dans la multiplication*, page 221
*Démonstration du procédé pour faire la division algébrique*, 222
*Observations sur la méthode du plus grand commun diviseur*, 227
*Tout nombre premier qui ne divise ni l'un ni l'autre des facteurs A et B, ne peut diviser leur produit AB*, 229
*Démonstration du binome de Newton, dans le cas de l'exposant entier*, 230
*Transformation d'une fraction* $\frac{B}{A}$, 237
*Résolution de l'équation générale du second degré*, 238
*De la méthode des coefficiens indéterminés*, 243

l'Auteur que je commente, et dès-lors on peut se demander à quoi bon multiplier ces productions ? Ma réponse se trouve en partie dans ce qui précède, et j'ajouterai que puisque ces ouvrages existent, ce n'est plus un mérite de faire mieux et d'aller plus loin, et qu'il en résulte pour l'Elève du travail de moins, et des connoissances de plus. D'une autre part, l'expérience de l'enseignement m'a convaincu que, dans un système de propositions bien liées entr'elles, et dépendantes les unes des autres d'une manière nécessaire, la difficulté venoit plus souvent de la contexture de la démonstration, que du fonds de la chose, c'est-à-dire, qu'un mot de plus, une phrase au lieu d'une autre, mettoient la vérité en évidence. On sait encore de combien les hommes qui ont long-temps professé, sont redevables à leurs Elèves, et particulièrement à ceux dont la marche est lente, mais sûre; et certes les documens qu'ils ont ainsi recueillis, les recherches dans lesquelles ils ont été engagés, doivent singulièrement améliorer un traité. Ces notes sont, aux élémens près, l'ouvrage d'algèbre qu'étudient mes Elèves, et j'ai la certitude qu'admis à l'Ecole Polytechnique, ils suivent avec facilité les cours d'analyse algébrique, différentielle et intégrale : ils trouvent dans d'autres ouvrages assez connus, pour qu'il ne soit pas nécessaire d'en citer les auteurs, le complément de l'instruction exigée, et de l'introduction à tous les autres cours de mathématiques, professés dans cet établissement.

J'espère pouvoir publier dans le cours de l'an X, le traité complet d'analyse algébrique, dont j'ai extrait ces notes, ou plutôt ces additions à l'Algèbre de *Clairaut*.

J. G. GARNIER.

*Alphabeth pour faciliter la lecture des calculs où l'on fait usage de lettres grecques.*

Α α . . . . . Alpha
Β β ϐ . . . . . Béta
Γ γ ϝ ɾ. . . . Gamma.
Δ δ ∂ . . . . . Delta.
Ε ε . . . . . Epsilon.
Ζ ζ . . . . . Zéta.
Η η . . . . . Êta.
Θ θ ϑ . . . . . Thêta.
Ι ι . . . . . Iota.
Κ κ . . . . . Cappa.
Λ λ . . . . . Lambda.
Μ μ . . . . . Mu.
Ν ν . . . . . Nu.
Ξ ξ . . . . . Xi.
Ο ο . . . . . Omicron.
Π π ϖ . . . . . Pi.
Ρ ρ ϱ . . . . . Rho.
Σ σ ς . . . . . Sigma.
Τ τ ϯ . . . . . Tau.
Υ υ . . . . . Upsilon.
Φ φ . . . . . Phi.
Χ χ . . . . . Chi.
Ψ ϕ . . . . . Psi.
Ω ω . . . . . Oméga.

# ÉLÉMENS D'ALGEBRE.

## DEUXIEME PARTIE.

*De la résolution des équations du second degré.*

Nous avons présentement assez traité des problêmes du premier degré pour passer à ceux des autres degrés, et particulierement aux problêmes du second degré, que nous allons examiner dans cette seconde Partie. Quant à la maniere d'exprimer analytiquement leurs conditions, elle est la même que dans les problêmes du premier degré: ce n'est que pour résoudre les équations auxquelles on arrive en exprimant les problêmes, qu'il faut employer des méthodes différentes, suivant les degrés de ces équations. On en peut voir un exemple dans le problême suivant, qui dans sa généralité renferme des problêmes de tous les degrés, et n'est pas plus difficile à exprimer analytiquement pour le degré le plus composé, que pour le plus simple.

I.

Problême qui contient dans sa généralité des problêmes de tous les degrés.

*Un homme ayant placé une somme* a *dans un commerce où il perd, veut se retirer dès la premiere année; mais ayant manqué l'occasion, et ne l'ayant pû retrouver qu'à la deuxieme ou à la troisieme, ou, en général, à la* $n^{ieme}$. *année, il trouve que la somme est diminuée de la quantité* b *de ce qu'elle étoit après la premiere année. On demande à combien pour cent montoit sa perte par an.*

Soit $x$ le nombre cherché, c'est-à-dire, ce que chaque cent livres perd après la premiere année. En faisant cette proportion 100 : 100 $- x = a : a \times \frac{100-x}{100}$, le quatrieme terme $a \times \frac{100-x}{100}$, ou $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}$ exprimera ce que devient la somme $a$ après la premiere année.

Si on continue ensuite cette proportion en disant

$$100 : 100 - x = \frac{a \times 100-x}{100} : \frac{a \times \overline{100-x}^2}{10000} :$$

le quatrieme terme

$$\frac{a \times \overline{100-x}^2}{10000}, \text{ ou } a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^2$$

sera ce que devient la même somme $a$ après la seconde année.

On exprimera de même ce que cette somme devient après la troisieme année par $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^3$, et, en général, ce qu'elle de-

vient après la n^ieme. année sera $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^{n}$, c'est-à-dire $a$ multiplié par la quantité $1 - \frac{x}{100}$ élevée à la puissance $n$.

II.

Présentement si on veut savoir quelle sera l'équation à résoudre, en supposant que le négociant se soit retiré à la seconde année, il faudra égaler la quantité $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^{2}$ à la quantité $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}$ diminuée de la quantité $b$, ce qui donnera.....

Equation du problême précedent pour le cas du second degré.

$$a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^{2} = a \times \overline{1 - \frac{x}{100}} - b,$$

ou en multipliant $1 - \frac{x}{100}$ par lui-même, ainsi que l'indique l'exposant 2,

$$a \times \overline{1 - \frac{2x}{100} + \frac{xx}{10000}} = a \times \overline{1 - \frac{x}{100}} - b$$

qui se réduit à $x^2 - 100x = -10000\frac{b}{a}$, équation du second degré à laquelle les méthodes précédentes ne sauroient atteindre.

III.

Si on suppose que ce ne soit qu'à la troisieme année, l'équation à résoudre sera $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^{3} = a \times \overline{1 - \frac{x}{100}} - b$, qui en multipliant $1 - \frac{x}{100}$ deux fois par lui-même, ainsi que l'indique l'exposant 3, devient

$$a \times \overline{1 - \frac{3x}{100} + \frac{3x^2}{10000} - \frac{x^3}{1000000}}$$

$= a \times \overline{1 - \frac{x}{100}} - b$, ou enfin $x^3 - 300\,x^2 + 20000\,x = 1000000\,\frac{b}{a}$, équation qui doit naturellement promettre plus de difficulté que la précédente.

IV.

Quant aux autres cas, on voit aisément comment on parviendroit successivement à former les équations qu'ils donneroient, et l'induction montre que l'équation seroit toujours du degré exprimé par le nombre $n$. Si on veut avoir cette équation, en général, sans spécifier le nombre $n$, on n'aura qu'à employer l'expression générale $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^n$ de la quantité que devient $a$ après la n^ieme. année, et l'équation sera

$$a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^n = a \times \overline{1 - \frac{x}{100}} - b,$$

ou $\overline{1 - \frac{x}{100}}^n = 1 - \frac{x}{100} - \frac{b}{a}$.

V.

Contentons-nous présentement de résoudre le problême dans le cas où son équation est du second degré, c'est-à-dire, lorsqu'elle est $x^2 - 100\,x = -10000\,\frac{b}{a}$, ou plutôt cherchons une méthode pour résoudre généralement toutes les équations du second degré. Ceux qui voudront résoudre des cas plus éle-

Manière d'arriver à la solution générale des équations du second degré.

vés du même problême, y parviendront facilement aussi-tôt qu'ils auront vû dans la suite, les méthodes générales qui conviennent aux degrés que ces équations donnent.

Ce qui se présente le plus naturellement, en cherchant une méthode pour résoudre généralement les équations du second degré, c'est de voir la liaison qu'il peut y avoir entre ces équations et celles du premier : or, il est clair que toute équation du premier degré deviendra du second, si on quarre les deux membres : par exemple, $x + a = b$ donne étant quarré $x^2 + 2ax + a^2 = b^2$ ; reste donc à savoir si, par une opération contraire, on pourroit rappeler toute équation du second degré à une du premier. Prenons, par exemple, l'équation $x^2 + px = q$ qui exprimera toute équation du second degré selon les valeurs qu'auront $p$ et $q$ ; ces lettres pouvant désigner toutes sortes de quantités positives ou négatives. Suivant ce que nous venons de dire, il n'y a qu'à voir si $x^2 + px$ ne seroit pas le quarré de quelque quantité dont la premiere partie seroit $x$, et dont la seconde seroit une connue, afin de trouver, par ce moyen, l'équation du premier degré, qui, étant quarrée, seroit devenue $x^2 + px = q$. Or, on voit facilement que $x^2 + px$ n'est pas un quarré, mais on voit en même temps qu'il peut le devenir par quelque addition, et l'on a, comme on sait, la liberté de faire cette

addition, pourvu qu'on ajoute la même quantité de l'autre côté de l'équation.

Afin de trouver ce qui manque à $x^2 + px$ pour en faire un quarré, il n'y a autre chose à faire qu'à comparer cette quantité avec le quarré $xx + 2ax + aa$; le terme $px$ répondant à $2ax$, $p$ répondra à $2a$ et partant $a$ à $\frac{1}{2}p$ : or, comme $a^2$ est ce qui manque à $x^2 + 2ax$ pour en faire un quarré, le quarré de $\frac{1}{2}p$, c'est-à-dire, $\frac{1}{4}p^2$ sera ce qui manque à $xx + px$ pour en faire un quarré, c'est-à-dire, que $xx + px + \frac{1}{4}p^2$ sera un quarré; il l'est en effet, et c'est celui de $x + \frac{1}{2}p$. Ayant donc ajouté $\frac{1}{4}pp$ au premier membre de l'équation, il faut en ajouter autant de l'autre côté, et l'équation sera $xx + px + \frac{1}{4}pp = q + \frac{1}{4}pp$. Or, la quantité $x + \frac{1}{2}p$ multipliée par elle-même donne $xx + px + \frac{1}{4}pp$; il faut donc que cette quantité soit aussi égale au nombre qui multiplié par lui-même donnera $q + \frac{1}{4}pp$. Pour exprimer ce nombre, ou plutôt cette quantité en général, on écrit $\sqrt{q + \frac{1}{4}pp}$ employant le signe $\sqrt{}$, qu'on appelle signe radical, pour faire (1) ressouvenir qu'il faut prendre la racine quarrée de la quantité qui le suit, laquelle doit

Le signe $\sqrt{}$ indique la racine quarrée.

(1) Le nombre qui, multiplié par lui-même, en a formé un autre est dit sa racine quarrée, ou simplement sa racine; cette définition, connue en arithmétique, est aussi admise en Algebre pour toutes sortes de quantités.

être toujours, pour éviter la confusion, surmontée d'une barre, ou renfermée entre des parentheses.

On a donc, en employant cette dénomination $x + \frac{1}{2} p = \sqrt{q + \frac{1}{4} p^2}$, d'où l'on tire $x = -\frac{1}{2} p + \sqrt{q + \frac{1}{4} p^2}$, valeur de $x$ dans l'équation proposée $x\,x + p\,x = q$, et cette valeur servira pour toute équation donnée, aussitôt qu'en comparant cette équation avec $x\,x + p\,x = q$, on aura déduit les valeurs particulieres de $p$ et de $q$.

## VI.

Si on se souvient présentement que l'on a trouvé (I. Part. art. LX.) qu'en multipliant une quantité négative par une quantité négative, il en résulte une quantité positive, de même que si on avoit multiplié deux quantités positives l'une par l'autre, on verra que la racine d'une quantité positive pourra toujours être affectée du signe que l'on voudra, ainsi au lieu de l'équation $x + \frac{1}{2} p = + \sqrt{q + \frac{1}{4} p^2}$, on peut écrire $x + \frac{1}{2} p = - \sqrt{q + \frac{1}{4} p^2}$, ce qui donneroit alors $x = -\frac{1}{2} p - \sqrt{q + \frac{1}{4} p^2}$; d'où l'on tire ce principe général qu'une équation quelconque du second degré, a toujours deux racines. On entend alors par racine d'une équation la valeur de l'inconnue dans cette équation, il faut

La racine quarrée d'une quantité est aussi bien négative que positive.

Une équation du second degré a deux racines, c'est-à-dire, deux valeurs d'$x$.

bien prendre garde de confondre cette expression avec celle de la racine quarrée.

VII.

Formule contenant ces deux racines.

Pour renfermer dans une seule et même expression les deux racines, ou valeurs de $x$ dans l'équation précédente $x\,x + p\,x = q$, on se sert du signe $\pm$, et l'on écrit ainsi ces deux valeurs $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$.

VIII.

Application de la formule précédente à l'équation de l'art. II.

Appliquons maintenant cette solution générale à l'équation $x\,x - 100\,x = -10000\,\frac{b}{a}$ à laquelle nous étions arrivés dans le problême précédent: En comparant cette équation avec $x^2 + px = q$, nous aurons

$$p = -100\,;\ q = -10000\,\frac{b}{a}$$

et faisant les substitutions de ces valeurs à la place de $p$ et de $q$ dans la formule générale $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, il viendra

$$x = 50 \pm \sqrt{2500 - 10000\,\frac{b}{a}}.$$

IX.

Réduction de la valeur d'$x$ en formant la racine du produit par celle des produisans.

On peut donner une forme un peu plus simple à la partie radicale $\sqrt{2500 - 10000\,\frac{b}{a}}$ de cette valeur de $x$, en partant de ce principe que la racine quarrée du produit de deux, ou de plusieurs quantités, est le produit des racines quarrées de ces quantités; car, décomposant alors $2500 - 10000\,\frac{b}{a}$ en ses deux produi-

sans 2500 et $1 - \frac{4b}{a}$ et prenant les racines de ces deux quantités, on aura 50 et $\sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$, dont le produit $50\sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$, sera la valeur de $\sqrt{2500 - 10000\frac{b}{a}}$, c'est-à-dire, que la valeur de $x$ sera $50 \pm 50\sqrt{1 - \frac{b}{a}}$.

Quant à la démonstration de ce principe que la racine d'un produit quelconque, se trouve en multipliant les racines de ses produisans, elle est bien facile à imaginer, lorsqu'on se rappelle l'inverse de ce principe, c'est-à-dire, que pour quarrer un produit comme $ab$, on multiplie l'un par l'autre, les quarrés $aa$ et $bb$ de ses produisans $a$ et $b$.

X.

Exemple du problème.

Pour faire usage de cette valeur de $x$, il n'est plus besoin que de savoir quel est le rapport qu'on veut qu'il y ait entre $b$ et $a$. Supposons, par exemple, que $b$ soit la partie $\frac{6}{25}$ de $a$, c'est-à-dire, que le négociant ait trouvé à la seconde année la somme diminuée de ce qu'elle étoit après la premiere d'une quantité égale aux $\frac{6}{25}$ du total, on aura par cette supposition $\frac{4b}{a} = \frac{24}{25}$ et $1 - \frac{4b}{25} = \frac{1}{25}$, d'où la racine $\sqrt{1 - \frac{4b}{25}}$ sera $\frac{1}{5}$, et donnera par conséquent $x = 50 \pm 50 \times \frac{1}{5}$ qui exprime à la fois 60 et 40.

Or ces deux valeurs de $x$ résolvent en effet

également l'équation $x\,x - 100\,x = -2400$ dans laquelle l'équation générale $x\,x - 100\,x = -10000\frac{b}{a}$ se change par la supposition de $\frac{b}{a} = \frac{6}{25}$ : car, $x\,x - 100\,x$ devient également $-2400$, soit qu'on fasse $x = 60$, ou que l'on prenne $x = 40$.

On peut encore, d'une maniere plus convaincante, reconnoître la nécessité des deux solutions 60 et 40. Car, qu'on suppose d'abord $x = 60$, c'est-à-dire, que la somme de 100000℔, par exemple, perde 60 pour cent par an, il est évident qu'après la premiere année elle sera réduite à 40000 ℔.

A la seconde année elle sera de 16000℔ en perdant encore 60 pour cent; or 16000℔ sont plus petits que 40000℔ de 24000℔ qui sont les $\frac{6}{25}$ de 100000℔.

Qu'on suppose à présent que la même somme de 100000℔ perde 40 pour cent par an, après la premiere année elle sera réduite à 60000℔, et après la seconde à 36000℔ : or 36000℔ sont encore plus petits que la somme 60000℔ de la quantité de 24000℔, ou des $\frac{6}{25}$ de 100000℔.

## XI.

Autre exemple. Si on veut que $b$ soit les $\frac{4}{25}$ de $a$, on aura $x = 50 \pm 50\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = 50 \pm 50\sqrt{\frac{9}{25}} = 50 \pm 30$, c'est-à-dire, ou 80, ou 20 qu'on trouvera encore résoudre également le problême.

## XII.

Mais si l'on suppose $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$ on trouvera $x = 50 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{3}}$, ou $50 \pm 50\sqrt{-\frac{1}{3}}$. Or, comme on ne sauroit trouver aucune quantité qui, étant multipliée par elle-même, donne —, il s'ensuit que la quantité $\sqrt{-\frac{1}{3}}$ ne sauroit être réelle, ou, ce qui revient au même, que le problême est impossible dans ce cas.

Troisieme exemple qui, demandant la racine d'une quantité négative, est impossible.

Ainsi on peut être assuré qu'il n'y a aucune valeur possible à substituer pour $x$ dans l'équation $x\,x - 100\,x = -\frac{10000}{3}$ qui fasse que les deux membres en deviennent égaux; ou, ce qui revient au même, que la somme $a$ ne sauroit être altérée chaque année, suivant aucune proportion donnée, qui soit telle que de la seconde à la troisieme année, la diminution soit d'une quantité égale au tiers du total. Les Géometres regardent cependant comme une espece de solution ou de racine de l'équation $x\,x - 100\,x = -\frac{10000}{3}$, la valeur $50 \pm 50\sqrt{-\frac{1}{3}}$ qu'ils trouvent alors; mais ils l'appellent une racine imaginaire, et cette racine imaginaire à cause du signe $\pm$ est toujours censée une double solution.

Ces racines sont ditesimaginaires.

## XIII.

On voit, par la valeur générale $-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}pp}$ de $x$, que toutes les fois que la quantité désignée par $q$, sera négative et plus grande que $\frac{1}{4}\,p\,p$, les deux racines de

Quelles sont les équations du second degré, dont les racines sont imaginaires.

l'équation $xx+px=q$, seront toutes imaginaires.

XIV.

Résolution des équations du second degré sans les comparer à la formule générale.

Lorsqu'on a une équation quelconque du second degré, on peut la résoudre sans la comparer terme à terme avec l'équation générale $xx+px=q$; car on peut sans augmenter le calcul, répéter le même procédé qu'on a suivi en resolvant cette équation générale. Il ne faut pour cela qu'*ajouter aux deux membres le quarré de la moitié de ce qui multiplie* x *dans le second terme du premier membre, et prendre ensuite la racine quarrée des deux membres.* Qu'on ait, par exemple, à résoudre l'équation $xx+8x=9$, en ajoutant des deux côtés 16, quarré de la moitié de 8, on a $xx+8x+16=9+16=25$. Et prenant ensuite la racine des deux côtés, on a $x+4=\pm 5$, c'est-à-dire, $x=-4\pm 5$, ou $x=-9$ et $x=1$, et ces deux valeurs résolvent également l'équation $xx+8x=9$.

XV.

Pour accoutumer les commençans aux difficultés qu'on rencontre dans les problêmes du second degré, nous leur proposerons encore le problême suivant :

Autre problême du second degré.

*Trouver sur la ligne qui joint deux lumieres quelconques, le point où ces deux lumieres éclairent également, en supposant ce principe de physique, que l'effet d'une lumiere est qua-*

*tre fois plus grand, lorsqu'elle est deux fois plus proche, neuf fois plus grand, lorsqu'elle est trois fois plus proche, ou pour s'exprimer comme les Géometres, que son effet est en raison renversée du quarré de la distance.*

Que $a$ exprime la distance qui est entre les lumieres données, et que le rapport de $m$ à $n$ soit celui qui est entre l'effet de la plus petite lumiere à une certaine distance, et l'effet de la plus grande lumiere à la même distance.

De plus, que $x$ exprime la distance de la plus petite des deux lumieres à un point pris à volonté sur la ligne qui joint les deux lumieres, il est clair que $a - x$ sera la distance du même point à l'autre lumiere, que les quarrés de ces deux distances seront $x^2$ et $x^2 - 2ax + a^2$, et par conséquent que les quantités qui seront en raison renversée de ces quarrés seront entr'elles comme $\frac{1}{xx}$ (1) et $\frac{1}{xx-2ax+aa}$.

De là il suit que si les lumieres étoient égales, les effets qu'elle produiroient chacune dans ce même point, seroient entr'elles comme $\frac{1}{xx}$ à $\frac{1}{xx-2ax+aa}$; mais ces lumieres ayant

(1) Ceci doit être facile à entendre à ceux qui auront vu dans l'Arithmétique ce que c'est que des raisons renversées. Il n'y a pas plus de difficulté à voir que $\frac{1}{xx}$ et $\frac{1}{xx-2ax+aa}$ sont en raison renversée de $xx$ et de $xx - 2ax + aa$, qu'à voir que $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ sont en raison renversée de 3 et 4.

des quantités absolues qui sont entr'elles dans la raison de $m$ à $n$, leurs effets doivent donc être entr'eux comme

$\frac{m}{xx}$ à $\frac{n}{xx-2ax+aa}$.

Présentement pour que le point pris à volonté devienne le point demandé, il n'y a autre chose à faire qu'à égaler ces deux quantités, ce qui donnera l'équation $maa - 2amx + mxx = nxx$, qu'on résoudra ainsi.

On commencera par passer les termes $mxx$ et $2amx$ dans l'autre membre, ce qui donnera $n-m \times xx + 2am^{\circ}x = maa$, ou $xx + \frac{2am}{n-m}x = \frac{aam}{n-m}$.

On ajoutera ensuite aux deux membres de cette équation le quarré de la moitié du coëfficient du second terme, et l'on aura

$$x^2 + \frac{2amx}{n-m} + \frac{aamm}{\overline{n-m}^2} = \frac{aam}{n-m} + \frac{aamm}{\overline{n-m}^2}$$

dont le second membre devient..... $\frac{aamn}{\overline{n-m}^2}$ en mettant les deux termes $\frac{aam}{n-m} + \frac{aamm}{\overline{n-m}^2}$ au même dénominateur et en réduisant.

Cela fait, on prendra la racine des deux membres de l'équation, et l'on aura.....

$$x + \frac{am}{n-m} = \pm\sqrt{\frac{aamn}{\overline{n-m}^2}},$$

ou $x = -\frac{am}{n-m} \pm \frac{a}{n-m}\sqrt{mn}$, en pre-

nant la racine de la partie $\frac{a\,a}{n-m}$, qui est un quarré parfait, et laissant sous le signe radical son multiplicateur $m\,n$, qui n'est pas un quarré, du moins dans toutes les valeurs de $m$ et de $n$. Donc les deux valeurs d'$x$ qui résolvent l'équation précédente, et par conséquent le problême qui a conduit à cette équation, sont exprimées par la formule.

$$x = -\frac{a\,m}{n-m} \pm \frac{a}{n-m}\sqrt{m\,n}, \text{ ou}$$

$$x = \frac{a}{n-m} \times -m \pm \sqrt{m\,n}.$$

XVI.

Des deux valeurs précédentes l'une est nécessairement positive, l'autre négative.

On voit par cette expression que l'une des valeurs est nécessairement négative, et l'autre positive. 1°. si on prend le signe — pour la quantité radicale $\sqrt{m\,n}$, il n'est pas douteux que la quantité totale ne soit négative. 2°. Si on fait $\sqrt{m\,n}$ positive, $-m+\sqrt{m\,n}$ qu'on a alors sera positive, parce qu'ayant fait par la supposition $n$ plus grand que $m$, $\sqrt{m\,n}$ doit être plus grand que $m$.

XVII.

Usage de la valeur négative.

Si on cherche présentement l'usage qu'on doit faire de la valeur négative, on trouvera, en se rappelant, ce qu'on a vu (I. Part. art. LXIII.) sur ces valeurs dans les équations du premier degré, qu'elle doit être prise dans un sens opposé à la premiere, c'est-à-dire, que le point qu'elle donne pour résoudre ce pro-

blême, au lieu d'être placé entre les deux lumieres, sera placé sur le prolongement de la ligne qui les joint du côté de la lumiere la plus foible.

On n'aura aucune difficulté à admettre cette position de la valeur négative de $x$, lorsqu'on remarquera que cette même valeur n'a été trouvée négative, que parce qu'on a résolu le problême, en regardant le point cherché comme placé entre les deux lumieres; car si on avoit fait attention à la possibilité de prendre ce point sur le prolongement de la ligne qui les joint, on auroit eu un autre calcul relatif à cette position, et l'$x$ qui auroit été alors placé naturellement sur le prolongement de la ligne qui joint les lumieres, auroit été positif.

XVIII.

Pour nous faire mieux entendre, nous allons reprendre le problême en entier, en supposant le point cherché sur le prolongement de la ligne qui joint les lumieres. La distance de ce point à la plus petite lumiere étant toujours nommée $x$, sa distance à la plus grande lumiere sera alors $a + x$, les quarrés de ces distances $x\,x$ et $a\,a + 2\,a\,x + x\,x$, les deux quantités de lumiere $\frac{m}{x\,x}$ et $\frac{n}{a\,a+2\,a\,x+x\,x}$, lesquelles étant égales par les conditions du problême, donneront $\frac{m}{x\,x} = \frac{n}{a\,a+2\,a\,x+x\,x}$ ou $m\,a\,a + 2\,a\,m\,x + m\,x\,x = n\,x\,x$, ou $n - m \times x\,x$

$-2amx=maa$, ou $xx-\frac{2amx}{n-m}=\frac{m}{n-m}aa$ qui étant résolue donnera

$x=\frac{a\times m\pm\sqrt{mn}}{n-m}$ dont la premiere valeur $\frac{a\times m+\sqrt{mn}}{n-m}$ sera positive, et la seule qui résoudra exactement le problême dans le sens où il est proposé alors.

Quant à la seconde valeur $\frac{a\times m-\sqrt{mn}}{n-m}$ qui est négative, elle doit être alors prise dans un sens opposé à la premiere, c'est-à-dire, que le point qu'elle donne doit être placé, non comme on l'a supposé dans le calcul, sur le prolongement de la ligne qui joint les deux lumieres, mais sur cette ligne elle-même.

Ainsi dans cette nouvelle solution on a, par rapport aux signes, tout le contraire de ce qu'on avoit dans la premiere, et ces deux solutions confirment ce que nous avons déjà vu dans la premiere Partie, art. LXIII, que les inconnues qui deviennent négatives, doivent toujours être prises dans un sens opposé à celui qu'on leur a donné en exprimant le problême.

XIX.

Nous ôterons, je crois, tout embarras aux lecteurs, sur ce problême, en prenant un exemple. Supposons que $n=4m$, c'est-à-dire, que la plus grande lumiere ait quatre fois plus de force que l'autre, en substituant cette valeur de $n$ dans la formule générale de l'article XV,

$x = \frac{a}{n-m} \times -m \pm \sqrt{mn}$; elle deviendra $x = \frac{a}{3} \times -1 \pm -2$, c'est-à-dire, ou $+\frac{1}{3}a$, ou $-a$, qui fournissent deux points également propres à résoudre le problême, l'un placé entre les deux lumieres deux fois plus près de la foible que de la forte, et l'autre sur le prolongement de la ligne qui joint ces lumieres, et à une distance de la foible égale à celle qui est entre les deux lumieres. Or, il est très-facile de voir sans Algebre que ces deux points résolvent également le problême, puisqu'ils sont l'un et l'autre deux fois plus près de la lumiere foible que de la forte, et que la forte est quadruple de la foible.

XX.

Les principes que nous venons de donner sont suffisans pour toutes les équations du second degré ; mais comme les commençans ne peuvent guères les posséder qu'en les pratiquant, nous allons les exercer à la résolution de plusieurs équations : il en résultera cet avantage, qu'outre qu'ils en auront mieux la méthode, ils apprendront en même-temps de nouvelles opérations d'Algebre, qui sont sans doute dûes aux recherches que les premiers Analystes ont faites sur les équations du second degré.

Nouveaux exemples de résolutions d'équations du second degré.

Soit $b\,x\,x = 2\,c^2\,x + 2\,c\,c\,a$, en ordonnant cette équation, c'est-à-dire, en passant les termes affectés de $x$ du même côté, et divisant tous les termes par le coëfficient de $x\,x$,

on aura $x^2 - \frac{2ccx}{b} = \frac{cca}{b}$, aux deux membres de laquelle ajoutant $\frac{c^4}{bb}$, et prenant ensuite la racine quarrée, on aura

$$x - \frac{cc}{b} = \pm \sqrt{\frac{2cc\,ab + c^4}{bb}}$$

$= \pm \frac{c}{b}\sqrt{2ab + cc}$, c'est-à-dire, .....

$x = \frac{cc \pm c\sqrt{ab + cc}}{b}$.

Soit $ff + gg - 2gx + xx = \frac{mmxx}{nn}$ qui devient d'abord

$\frac{mm-nn}{nn} \times xx + 2gx = ff + gg$, et ensuite

$$xx + \frac{2gnn}{mm-nn}x = \frac{ffnn + ggnn}{mm-nn},$$

ou $$xx + \frac{2gnnx}{mm-nn} + \frac{ggn^4}{mm-nn^2}$$

$$= \frac{ffnn + ggnn}{mm-nn} + \frac{ggn^4}{mm-nn^2}$$

$$= \frac{ffnnmm + ggnnmm - ffn^4}{mm-nn^2}$$

d'où l'on tire.....

$$x + \frac{gnn}{mm-nn} = \pm \frac{n\sqrt{ffmm + ggmm - ffnn}}{mm-nn},$$

ou $x = \frac{n}{mm-nn} \times -gn \pm \sqrt{ffmm + ggmm - ffnn}$

Soit $abc - aff + 2afz = azz - bzz$ qui étant d'abord ordonnée deviendra

$zz - \frac{2af}{a-b}z = \frac{abc-aff}{a-b}$, ensuite

$$zz - \frac{2af}{a-b}z + \frac{aaff}{a-b^2} = \frac{abc-aff}{a-b} + \frac{aaff}{a-b^2}$$

$= \frac{aabc - abbc + abff}{a-b^2}$ qui donne:.....

$z = \frac{af \pm \sqrt{aabc - abbc + abff}}{a-b}$.

Soit à présent l'équation $4a^2 - 2x^2 + 2ax = 18ab - 18bb$, en ordonnant on aura $xx - ax = 2aa - 9ab + 9bb$, ou $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{9}{4}aa - 9ab + 9bb$ qui donne $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{9}{4}aa - 9ba + 9bb}$.

On réduira aisément cette quantité si on a vu, et on ne pouvoit guères manquer de le voir dans tout ce que nous venons de dire, que le quarré d'une quantité composée de deux termes, devoit être égal à la somme des quarrés de chacun de ces deux termes, et au double produit de ces deux termes.

Car, trouvant dans la quantité $\frac{9}{4}aa - 9ba + 9bb$ les termes $\frac{9}{4}aa$ et $9bb$ qui sont les quarrés de $\frac{3}{2}a$ et de $3b$, et le terme $9ab$ qui est le double produit de $\frac{3}{2}a$ et de $3b$, on voit aisément que cette quantité $\frac{9}{4}aa - 9ba + 9bb$ est le quarré de $\frac{3}{2}a - 3b$. Donc au lieu de l'expression $\sqrt{\frac{9}{4}aa - 9ba + 9bb}$, on peut écrire simplement $\frac{3}{2}a - 3b$ : donc la valeur de $x$ est alors $\frac{1}{2}a \pm \frac{3}{2}a \mp 3b$, c'est-à-dire, ou $2a - 3b$, ou $-a + 3b$. En effet, l'on voit que ces valeurs résolvent également l'équation donnée.

## XXI.

Comme dans les différentes équations du second degré qu'on peut avoir à résoudre, il arrivera souvent des cas de même nature que celui qu'on vient de trouver, il faut avoir

quelque méthode sûre et générale pour reconnoître les quantités qui sont des quarrés, et pour trouver leurs racines; cette méthode est aisée à tirer des principes que nous venons d'employer dans l'exemple précédent; en voici le procédé sur un autre exemple.

Procédé de l'extraction de la racine quarrée expliqué sur un exemple.

Soit la quantité $30\,a\,b + 9\,b\,b + 25\,a^2$ dont on demande la racine quarrée.

J'ordonne d'abord cette quantité par rapport à une des lettres qu'elle contient, par rapport à $a$, par exemple, et j'écris par conséquent cette quantité, ainsi qu'on la voit dans la Table ci-jointe, case 1.

Je prends ensuite la racine du premier terme $25\,a^2$, laquelle est $5\,a$, que je prends pour premier terme de la racine cherchée, et que j'écris à côté de la quantité proposée $25\,a^2 + 30\,b\,a + 9\,b\,b$, ayant tiré auparavant une barre pour éviter la confusion. Je place alors sous la proposée le quarré $25\,a^2$ de $5\,a$, en lui donnant le signe —, je tire une barre et je réduis, j'ai, par ce moyen, la quantité $30\,b\,a + 9\,b\,b$ que j'écris sous la barre; cela fait, je double $5\,a$, ce qui me donne $10\,a$ que j'écris au-dessous de $5\,a$, et je divise ensuite le premier terme $30\,b\,a$ de la quantité $30\,b\,a + 9\,b\,b$ par $10\,a$, et j'écris le quotient $3\,b$, qui est le second terme de la racine cherchée à côté de $5\,a$, je l'écris en même temps à côté de $10\,a$, et je multiplie ce nouveau terme $3\,b$ de la racine par la quantité inférieure $10\,a + 3\,b$, en

observant, comme dans la division, de changer les signes en écrivant le produit sous la quantité $30\,a\,b + 9\,b\,b$; faisant alors la réduction, et voyant que tout se détruit, je conclus que $5\,a + 3\,b$ est la racine cherchée.

## XXII.

Pour fortifier les commençans dans la méthode d'extraire les racines quarrées, il ne sera pas inutile de leur faire parcourir les deux exemples suivans :

Autre exemple d'extractions de racine quarrée.

Soit d'abord proposé d'extraire la racine quarrée de la quantité $4\,a^2 - 4\,b\,a + 4\,c\,a + b\,b - 2\,c\,b + c\,c$ ordonnée par rapport à $a$.

Je commence par prendre la racine de $4\,a^2$ laquelle est $2\,a$ que j'écris à côté de la proposée, (Voyez la seconde case de la Table ci-jointe) je retranche ensuite le quarré $4\,a\,a$, et j'écris le reste $-4\,b\,a + 4\,c\,a + b^2 - 2\,c\,b + c\,c$; je double $2\,a$, et j'écris le double $4\,a$ au-dessous; je divise le terme $-4\,b\,a$ par $4\,a$, et j'écris le quotient $-b$, tant à côté de la racine que du diviseur $4\,a$. Multipliant alors $-b$ par $4\,a - b$, j'ai, en changeant les signes, $+4\,b\,a - b\,b$ que je place encore sous le dividende, et j'ai, après la réduction, $+4\,c\,a - 2\,c\,b + c\,c$ qui doit servir encore de dividende; je double alors la racine $2\,a - b$, et j'écris le double $4\,a - 2\,b$ au-dessous; je divise $+4\,c\,a$ par $4\,a$, et j'écris le quotient $+c$ à côté de la racine $2\,a - b$, et à côté du divi-

Case 1.

$2a - b + c$
$4a - b$
$4a - 2b + c$

Case 2.

$+16b^4$

$2x^2 + 2ax + 4b^2$
$4x^2 + 2ax$
$4x^2 + 4ax + 4b^2$

Case 3.

$+16b^4$

$+16b^4$
$-16b^4$

Autre exemple d'extractions de racine quarrée.

seur. Faisant ensuite la multiplication de $+c$ par $4a - 2b + c$, et écrivant avec des signes différens le produit sous le dividende, tout se détruit, d'où je conclus que la racine est possible, et qu'elle est $2a - b + c$.

Soit ensuite proposé d'extraire la racine quarrée de la quantité
$4x^4+8ax^3+4a^2x^2+16b^2x^2+16b^2ax+16b^4$
ordonnée par rapport à $x$ : en suivant les opérations qui sont écrites dans la Table ci-jointe, case 3, on verra facilement que la quantité est $2xx+2ax+4bb$.

## XXIII.

Dans les différens exemples que nous avons donnés sur les résolutions des équations du second degré, les commençans n'ont guères pu trouver de difficulté que lorsqu'il étoit question de réduire les quantités radicales en ôtant de dessous le signe, les quantités quarrées qui étoient des produisans de la quantité radicale : en effet cette opération est la plus délicate de celles qui peuvent entrer dans la résolution des équations du second degré, il est donc important que les commençans s'appliquent à la pratiquer facilement. Pour les aider à y parvenir, nous joindrons ici les exemples suivans :

$$\sqrt{48aabc} = 4a\sqrt{3bc}$$

Exemples de réduction de quantités radicales.

$$\sqrt{\frac{a^3b+4aabb+4ab^3}{cc}} = \frac{a+2b\sqrt{ab}}{c}$$

$$\sqrt{\frac{aahhmm}{ppqq}+\frac{4aam^3}{pqq}} = \frac{am}{pq}\sqrt{hh+4mp}$$

$$6\sqrt{\tfrac{75}{98}abb} = \tfrac{30b}{7}\sqrt{\tfrac{3a}{2}}.$$

## XXIV.

Les quantités qui n'ont point de racines exactes sont dites incommensurables ou irrationnelles.

Presqu'aussi-tôt que les équations du second degré ont fait connoître les quantités irrationnelles ou incommensurables (on appelle ainsi les quantités qui n'ont point de racines exactes), on a été obligé de faire sur ces quantités les mêmes opérations que sur les quantités rationnelles ou commensurables, c'est-à-dire, qu'on a eu à ajouter, à soustraire, à multiplier, à diviser des quantités, ou toutes incommensurables, ou en partie incommensurables, et en partie commensurables.

L'addition et la soustraction de ces quantités ne supposent que leur réduction.

Quant à l'addition et à la soustraction des quantités radicales, elles ne renferment aucune difficulté que celles de la réduction de ces mêmes quantités à leurs plus simples expressions.

Par exemple, s'il faut ajouter $\sqrt{48abb}$ avec $b\sqrt{75a}$, je change la premiere de ces quantités en $4b\sqrt{3a}$, et la seconde en $5b\sqrt{3a}$, dont la somme est $9b\sqrt{3a}$.

De la même maniere

$$\sqrt{48\,c^3} - \sqrt{\tfrac{16}{27}\,c^3} = \tfrac{32}{9}\,c\sqrt{3c}.$$

$$\sqrt{\tfrac{ab^3}{cc} + \tfrac{1}{2c}\sqrt{a^3b - 4aabb + 4ab^3}} = \tfrac{a}{2c}\sqrt{ab}.$$

$$a\sqrt{\frac{a^3b}{3aa+6ac+3cc}} - \frac{bc\sqrt{ab}}{a+c} = \sqrt{\frac{aa}{3}} - bc..$$

$$\times \frac{\sqrt{ab}}{a+c}.$$

## XXV.

Multiplications des incommensurables.

A l'égard de la multiplication, si les quantités qu'on veut multiplier sont toutes deux incommensurables, il est clair qu'il n'y aura autre chose à faire qu'à multiplier les quantités qui sont sous le signe radical, et mettre le même signe radical à la tête du produit; s'il se trouve alors des réductions à faire, on les fera comme ci-dessus.

Qu'on ait à multiplier, par exemple, $\sqrt{ab}$ par $\sqrt{ac}$, on écrira $\sqrt{aabc}$, ou $a\sqrt{bc}$.

De même

$$\sqrt{3cd} \times \sqrt{4fgc} = \sqrt{12fgccd} = 2c\sqrt{3fgd}.$$

Lorsque les quantités radicales qu'on aura à multiplier seront égales, il faudra simplement ôter le signe radical. Pour multiplier, par exemple, $\sqrt{a^3cd}$, par $\sqrt{a^3cd}$, on écrit simplement la quantité $a^3cd$ sans signe radical.

Si la quantité qui multiplie un radical est rationnelle, il faut se contenter de l'écrire devant le signe avec une barre au-dessus lorsqu'elle a plusieurs termes; si on vouloit la faire en-

trer sous le signe radical, il faudroit la quarrer auparavant.

Par exemple, le produit de $a+b$ par

$$\sqrt{\frac{ffg}{aa-bb}} \text{ est } \overline{a+b}\sqrt{\frac{ffg}{aa-bb}},$$

ou $\sqrt{\frac{ffg\times\overline{aa+2ab+bb}}{aa-bb}}$, ou $\sqrt{\frac{ffg\times\overline{a+b}}{a-b}}$,

ou $\frac{f\sqrt{\overline{ag+bg}}}{\sqrt{a-b}}$.

$$2a\sqrt{\frac{aa+bb}{c}}\times -3a\sqrt{\frac{aa+bb}{d}}$$

$$= -\frac{6aa\times\overline{aa+bb}}{\sqrt{cd}} = -\frac{6a^4+6aabb}{\sqrt{cd}}.$$

$$\sqrt{\overline{a+b}}\times\sqrt{\overline{a-b}}=\sqrt{\overline{aa-bb}}.$$

S'il est question de multiplier des quantités composées de plusieurs autres, ou toutes radicales, ou en partie radicales et en partie incommensurables, l'opération ne sera pas plus difficile que les précédentes, pourvu qu'on se rappelle les regles ordinaires des multiplications des quantités complexes.

Par exemple, $\overline{3a\sqrt{bc}-2b\sqrt{ac}}\times 2c\sqrt{ab}$

$$=6abc\sqrt{ac}-4abc\sqrt{bc}$$

$$\overline{a+\sqrt{aa-bb}}\times\overline{a+\sqrt{aa-bb}}$$

$$=2aa-bb+2a\sqrt{\overline{aa-bb}}.$$

$$\overline{a+\sqrt{aa-xx}}\times\overline{a-\sqrt{aa-xx}}=xx.$$

XXVI.

Division des incommensurables.

Lorsqu'il s'agira de diviser deux quantités irrationnelles l'une par l'autre, on divisera les quantités qui seront sous le signe, et l'on mettra le signe devant le quotient.

S'il faut diviser une quantité irrationnelle par une rationnelle, on mettra simplement la rationnelle sous l'autre, avec une barre assez longue, pour qu'on puisse connoître que le signe ne porte pas dessus ; si on veut, au contraire, que le signe radical y porte, il faudra quarrer le diviseur.

S'il y a des quantités commensurables devant les radicaux, on les divisera à l'ordinaire, et on écrira leur quotient à côté du quotient radical. Toutes ces choses s'entendront sans aucune peine, par les exemples.

$$\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}} = \sqrt{b}; \frac{ac\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = c\sqrt{c}; \frac{12ac\sqrt{6bc}}{4c\sqrt{2b}}$$

$$= 3a\sqrt{3c}; \frac{\sqrt{aa-xx}}{\sqrt{a+x}} = \sqrt{a-x};$$

$$\frac{\sqrt{aabb-bbxx}}{a-x} = b\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

XXVII.

Ce qu'on vient de dire sur les équations du second degré, suffit lorsque ces équations ne renferment qu'une inconnue ; mais comme on rencontre souvent des problêmes dans lesquels il est nécessaire d'en employer plusieurs, il faut voir comment l'on traite ces problêmes, nous prendrons dans cette vue l'exemple suivant.

Problême du second degré qui demande plusieurs inconnues.

*Trouver trois quantités en progression* (1) *géométrique, dont la somme soit donnée, ainsi que la somme de leurs quarrés.*

Soient les trois quantités cherchées $x, y, z$, on aura par la nature des progressions : $x : y = y : z$, c'est-à-dire, $yy = xz$; de plus, parce que leur somme est donnée, en nommant cette somme $a$, on aura $x + y + z = a$; enfin en nommant la somme de leurs quarrés $bb$, on aura, par la derniere condition du problême, $xx + yy + zz = bb$.

Pour faire usage de ces trois équations, on commencera par chasser $z$ au moyen de sa valeur $a - x - y$ tirée de l'équation $x + y + z = a$; substituant donc cette valeur de $z$ dans les deux autres équations, elles se changeront en $2yy + 2xx + 2xy + aa - 2ax - 2ay = bb$, et $yy = ax - xx - xy$. Pour chasser ensuite celle qu'on voudra des deux inconnues que renferment ces deux équations, on trouvera la valeur que cette inconnue a dans chacune de ces équations, et on égalera les deux valeurs que l'on aura par ce moyen, opérations faciles par les principes précédens. Que $x$ soit cette inconnue à chasser, la premiere équation

(1) Trois quantités dont la premiere est à la seconde, comme la seconde à la troisieme, telles que 8, 12, 18, par exemple, sont dites en progression géométrique, ou en proportion continue. On ne sauroit entendre la théorie des proportions, qu'on ne sache en même temps celle des progressions.

donnera..... $x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{bb}{2} - \frac{aa}{4} - \frac{3}{4}yy + \frac{1}{2}ay}$, et pour la seconde..... $x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ay - \frac{3}{4}yy}$. Il n'y a donc plus qu'à égaler ces deux valeurs, ce qui donnera l'équation..... $-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{bb}{2} - \frac{aa}{4} - \frac{3}{4}yy + \frac{1}{2}ay} = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ay - \frac{3}{4}yy}$ qu'il ne s'agit plus que de résoudre.

On remarquera premièrement, que les termes $-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a$ sont communs des deux côtés, et que par conséquent l'équation se réduit à $\pm \sqrt{\frac{bb}{2} - \frac{aa}{4} - \frac{3}{4}yy + \frac{1}{2}ay} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ay - \frac{3}{4}yy}$. Or, en quarrant les deux membres de cette équation, les deux radicaux disparoissent tout de suite, et l'équation devient en réduisant $ay = \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb$ qui donne $y = \frac{aa - bb}{2a}$, substituant ensuite cette valeur de $y$ dans l'une des précédentes de $x$, on aura $x = \frac{1}{4}a + \frac{bb}{4a} \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - \frac{3}{16}aa + \frac{3}{8}bb - \frac{3b^4}{16aa}}$ ou $x = \frac{bb + aa \pm \sqrt{10bbaa - 3a^4 - 3b^4}}{4a}$ et en substituant la valeur de $x$ et celle de $y$ dans $z$

$= a - x - y$, on aura enfin,.....

$z = \frac{a\,a + b\,b \mp \sqrt{10\,b\,b\,a\,a - 3\,a^4 - 3\,b^4}}{4\,a}$

## XXVIII.

Comme on est arrivé, dans cette solution, à une valeur extrêmement simple pour $y$, après avoir eu des radicaux assez composés, on doit soupçonner qu'on pouvoit y arriver par une voie plus courte : en effet, avec un peu de réflexion, on trouve facilement la méthode suivante.

Autre maniere de résoudre les équations précédentes.

Soient reprises les deux équations $x^2 - a\,x + y\,x = \frac{b\,b}{2} - \frac{a\,a}{2} - y^2 + a\,y$ et $x^2 + x\,y - a\,x = -y\,y$; en retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on a $o = \frac{b\,b}{2} - \frac{a\,a}{2} + a\,y$, d'où l'on tire $y = \frac{a\,a - b\,b}{2\,a}$, qui, étant substitué dans l'une ou l'autre de ces deux équations, donne

$$x^2 + \frac{a\,a\,x - b\,b\,x}{2\,a} - a\,x = \frac{-a^4 + 2\,a\,a\,b\,b - b^4}{4\,a\,a},$$

ou $x^2 \frac{- \sqrt{b\,b + a\,a} \times x}{2\,a} = \frac{-a^4 + 2\,a\,a\,b\,b - b^4}{4\,a\,a}$ d'où l'on tire la même valeur de $x$ que ci-dessus.

## XXIX.

Dans ce problême, on a eu des quantités qui se sont détruites par une espèce de hasard, ce qui a extrêmement simplifié les calculs; mais

comme les équations du second degré, à plusieurs inconnues, n'offrent pas toujours de pareilles facilités, il faut savoir ce qu'on doit faire dans des cas moins simples. Pour cela soit pris, par exemple, les deux équations

$$x^2 + ax - 2xy = aa + 2yy;$$
$$xx - 2ax + xy = 2aa - yy.$$

Exemple d'équation du second degré à deux inconnues plus compliqué que le précédent.

La premiere de ces équations donne $x = -\frac{1}{2}a + y \pm \sqrt{\frac{5}{4}aa - ay + 3yy}$, l'autre donne $x = a - \frac{1}{2}y \pm \sqrt{3aa - ay - \frac{3}{4}yy}$ égalant ensuite ces deux valeurs, et réduisant, on a

$$-\frac{3a}{2} + \frac{3}{2}y \pm \sqrt{\frac{5}{4}aa - ay + 3yy} = \pm\sqrt{3aa - ay - \frac{3}{4}yy}.$$

Pour faire ensuite évanouir les radicaux de cette équation, je commence par quarrer les deux membres, ce qui me donne $\frac{9}{4}yy - \frac{9}{2}ay + \frac{9}{4}aa \pm \sqrt{3y - 3a}\sqrt{\frac{5}{4}aa - ay + 3yy} + \frac{5}{4}aa - ay + 3yy = 3aa - ay - \frac{3}{4}yy$ qui contient encore un radical. Afin de le faire disparoître, j'écris ainsi cette équation.....

$$\ldots - \tfrac{1}{2}aa + \tfrac{9}{2}ay - 6yy = \pm\sqrt{3y - 3a}\sqrt{\tfrac{5}{4}aa - ay + 3yy},$$

en la réduisant et laissant la quantité radicale

$$\pm\sqrt{3y - 3a}\sqrt{\tfrac{5}{4}aa - ay + 3yy}$$

seule d'un côté de l'équation; cela fait, je quarre

les deux membres, et j'ai.....

$$\tfrac{1}{4}a^4 - \tfrac{9}{2}a^3y + \tfrac{105}{4}aayy - 54ay^3 + 36y^4 = 9yy - 18ay + 9aa \times \tfrac{5}{4}aa - ay + 3yy$$

ou en réduisant

Equation finale à laquelle conduisent ces équations.

$$9y^4 + 9ay^3 - 30aayy + 27a^3y = 11a^4$$

c'est-là l'équation qui résulte des deux précédentes, et celle qu'il faudroit résoudre pour avoir la solution du problême qui auroit donné ces deux équations : on voit par-là qu'il n'en est pas des équations du second degré à plusieurs inconnues, comme de celles du premier, qui ne donnent jamais une équation finale d'un autre degré qu'elles.

## XXX.

Autre maniere de traiter le même exemple.

On peut, sans avoir la peine de résoudre les équations du second degré, et de chasser ensuite leurs radicaux, parvenir également à l'équation finale.

Soit repris, pour le faire voir, les deux équations précédentes, et soit tirée la valeur de $xx$ de chacune d'elles, la premiere fournira

$$x^2 = aa + 2yy - ax + 2xy,$$

la seconde

$$x^2 = 2aa - yy + 2ax - xy.$$

Egalant ces deux valeurs, on a $aa + 2yy + 2xy - ax = 2aa - yy - xy + 2ax$, d'où l'on tire $x = \frac{3yy - aa}{3a - 3y}$, dont la substitution dans l'une ou l'autre des deux équations données, dans $xx - 2ax + xy = 2aa - yy$, par

par exemple, donne $\frac{9y^4 - 6aayy + a^4}{(3a-3y)^2} \cdots$
$+ \frac{(y-2a)\times(3yy-aa)}{3a-3y} = 2aa - yy$ qui étant réduite, produit la même équation
$9y^4 + 9ay^3 - 30aayy + 27a^3y = 11a^4$.

XXXI.

Pour habituer les commençans à se servir de cette méthode qui est d'un grand usage dans l'analyse; nous allons l'appliquer aux deux équations

$$x^2 + axy + bx = cy^2 + dy + e$$
$$x^2 + fxy + gx = hy^2 + iy + k$$

qui contiennent chacune la plus grande complication que puissent avoir les équations du second degré à deux inconnues.

Tirant une valeur de $x^2$ de chacune de ces équations et les égalant, on aura
$(a-f)\times xy + (b-g)\times x = (c-h)\times y^2$
$+ (d-i)\times y + (e-k)$
laquelle, en faisant pour abréger les calculs,
$a - f = l$; $b - g = m$; $c - h = n$;
$d - i = p$; $e - k = q$
se change en $lxy + mx = ny^2 + py + q$,
d'où je tire $x = \frac{ny^2+py+q}{ly+m}$. Or, substituant celle-ci dans l'une ou dans l'autre des deux équations données, dans la premiere, par exem-

ple; j'ai $\frac{(ny^2+py+q)^2}{(ly+m)^2} + \frac{(ay+b)\times(ny^2+py+q)}{ly+m}$
$= cy^2 + dy + e$
ou $(ny^2+py+q)+(ay+b)\times(ny^2+py+q)$
$\times(ly+m) = (cy^2+dy+e)\times(ly+m.)$

Si on fait alors les opérations indiquées, que l'on réduise et que l'on ordonne, il vient enfin

$$y^4 + \frac{bln+amn+alp+2np-2mlc-l^2d}{aln+nn-l^2c}y^3$$
$$+ \frac{bmn+qal+pbl+pam+p^2+2nq-m^2c-2mld-el^2}{aln+nn-l^2c}y^2$$
$$+ \frac{blq+amq+bmp+2pq-m^2d-2mel}{aln+nn-l^2c}y$$
$$= \frac{m^2e-q^2-bmq}{aln+n^2-l^2c},$$

équation du quatrieme degré qui résulte des deux équations du second degré les plus générales.

## XXXII.

Si on avoit des équations telles que $xxy + axy = abb$ et $xxyy + ccyx = a^4$, ces équations ne seroient pas comptées parmi celles du second degré parce que le produit inconnu de $x^2$ par $y$ renfermant trois facteurs et du troisieme degré et que celui de $x^2$ par $y^2$ qui en contient quatre, est du 4me; mais la méthode précédente serviroit avec la même facilité à chasser les $x$ de ces deux équations. Pour le faire voir, supposons que $\alpha$ représente toutes les quantités composées d'$y$ et de connues, à quelque degré qu'elles montent, qui peuvent multiplier $x^2$ dans l'une des

*y* étant à un degré quelconque, et *x* seulement au second degré, on traiteroit de même les deux équations.

équations données ; $\beta$ toutes celles qui multiplient $x$ dans les mêmes équations ; $\gamma$ les quantités entierement connues qui sont de l'autre côté de la même équation, c'est-à-dire que cette premiere équation sera $\alpha x^2 + \beta x = \gamma$. Que la seconde soit de même $\delta x^2 + \epsilon x = \varphi$.

On tirera de la premiere $x^2 = \frac{\gamma - \beta x}{\alpha}$, et de la seconde $x^2 = \frac{\varphi - \epsilon x}{\delta}$ lesquelles étant égalées donnent $\gamma\delta - \beta\delta x = \varphi\alpha - \epsilon\alpha x$ d'où l'on tire $x = \frac{\varphi\alpha - \gamma\delta}{\epsilon\alpha - \beta\delta}$, qui, étant substitué dans l'équation $\alpha x^2 + \beta x = \gamma$, donne $\alpha \times (\varphi\alpha - \gamma\delta)^2 + \beta \times (\alpha\epsilon - \beta\delta) \times (\varphi\alpha - \gamma\delta) = \gamma \times (\epsilon\alpha - \beta\delta)^2$ dans laquelle mettant pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \varphi$ leurs valeurs composées de $y$, et de connues, l'on aura l'équation cherchée.

## XXXIII.

Si les $x$, ainsi que les $y$, montoient chacune à des degrés plus hauts que le second, on pourroit encore, dans ce cas, employer la méthode précédente : supposons, par exemple, qu'on ait les deux équations $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x = \delta$, $\epsilon x^3 + \varphi x^2 + \chi x = \iota$, dans lesquelles $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \varphi, \chi, \iota$ représentent toutes sortes de quantités composées d'$y$ et de connues, on commencera par prendre $x^3$ dans chacune de ces équations, et on égalera ses deux valeurs, ce qui donnera

Ce qu'il faudroit faire pour arriver à l'equation finale, lorsque $x$ seroit au troisieme degré.

$$\frac{\delta - \beta x^2 - \gamma x}{\alpha} = \frac{\iota - \varphi x^2 - \chi x}{\epsilon}$$

ou $\delta\varepsilon - \varepsilon\beta x^2 - \gamma\varepsilon x = \eta\alpha - \varphi\alpha x^2 - \chi\alpha x$. ou $(\varphi\alpha - \varepsilon\beta) \times x^2 = (\gamma\varepsilon - \chi\alpha) \times x + \eta\alpha - \delta\varepsilon$ dans laquelle $x$ n'est qu'au second degré. Multipliant ensuite cette équation par $\alpha x$, ainsi que l'équation $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x = \delta$ par $\varphi\alpha - \varepsilon\beta$, j'ai les deux équations $(\varphi\alpha^2 - \alpha\varepsilon\beta) \times x^3 = (\gamma\varepsilon\alpha - \chi\alpha^2 \times x^2) + (\eta\varepsilon\alpha - \delta\varepsilon\alpha) \times x$, et $(\varphi\alpha^2 - \alpha\varepsilon\beta) \times x^3 + (\beta\varphi\alpha - \beta^2\varepsilon) \times x^2 + (\gamma\varphi\alpha - \gamma\varepsilon\beta) \times x = \delta \times (\varphi\alpha - \varepsilon\beta)$ desquelles je chasse $x^3$ comme des deux premieres équations, ce qui donnera

$$\alpha\big((\gamma\varepsilon - \chi\alpha) + \beta(\varphi\alpha - \beta\varepsilon)\big)x^2 + \alpha\big((\eta\varepsilon - \delta\varepsilon) + \gamma(\varphi\alpha - \varepsilon\beta)\big)x = \delta(\varphi\alpha - \beta\varepsilon)$$

dans laquelle $x$ ne monte non plus qu'au second degré. Voilà donc le problême réduit présentement au cas qu'on a résolu dans l'article précédent, c'est-à-dire, à celui où l'on a deux équations dans lesquelles l'inconnue $x$ ne monte qu'au second degré. Il est inutile d'en achever ici le calcul, puisqu'il n'auroit de difficulté que celle de la longueur.

## XXXIV.

Ce seroit la même chose si $x$ montoit à des degrés plus élevés.

Si l'inconnue, qu'on veut chasser des deux équations proposées, s'y trouvoit élevée à un degré plus haut que le troisieme, on voit bien que par une opération semblable à la précédente, on les changeroit d'abord en deux autres équations d'un degré moindre, et que par ce moyen on parviendroit toujours à chasser entièrement l'inconnue.

## XXXV.

Si au lieu de deux inconnues on en avoit

trois élevées chacune à un degré quelconque, il est clair que pourvu qu'on eût trois équations, on parviendroit par la même méthode, à une équation finale, qui ne contiendroit que celle que l'on voudroit de ces trois inconnues; car, oubliant d'abord une de ces trois inconnues, deux des trois équations suffiroient pour arriver à une seule, qui ne renfermeroit que l'inconnue oubliée, et que celle que l'on voudroit des deux autres inconnues. Faisant ensuite la même opération avec l'une des deux équations employée dans la premiere opération et la troisieme équation, on parviendroit à une autre équation, entre les deux mêmes inconnues, c'est-à-dire, que le problême seroit réduit à celui où l'on a deux équations à deux inconnues, d'où l'on parviendroit enfin à une seule inconnue renfermée dans une équation.

S'il y avoit plus de deux inconnues, on parviendroit de même à l'équation finale.

Si on avoit quatre équations et quatre inconnues, on réduiroit de même la question à trois équations et trois inconnues, puis à deux équations et deux inconnues, puis enfin à une seule équation et à une inconnue; il en seroit de même pour un plus grand nombre d'équations et d'inconnues.

# ÉLÉMENS D'ALGEBRE.

## TROISIEME PARTIE.

*Où l'on donne quelques principes généraux pour les équations de tous les degrés, avec la méthode de tirer de ces équations celles du premier et du second degré qu'elles peuvent renfermer.*

Si les équations plus élevées que le second degré ont présenté de grandes difficultés, lorsqu'on a entrepris de les résoudre dans tous les cas, il a été du moins assez facile de faire sur ces équations des réflexions générales qui pouvoient en faire connoître la nature, et servir à les résoudre dans beaucoup de cas particuliers.

Ayant vu, par exemple, que les équations du premier degré n'avoient qu'une racine, que celles du second en avoient deux, on a été porté à croire que celles du troisieme en avoient trois, et ainsi de suite, et pour s'as-

surer de cette vérité, ou plutôt pour comprendre comment une équation pouvoit avoir autant de racines qu'elle a de degrés, on a cherché l'inverse du problême qu'on s'étoit proposé d'abord, c'est-à-dire, qu'au lieu de chercher les racines d'une équation, on a cherché qu'elle seroit l'équation qui auroit pour ses racines des quantités données, problême infiniment plus facile que le premier.

I.

Manière de former une Equation par le moyen de ses racines.

Qu'on demande, par exemple, qu'elle est l'équation dans laquelle $x$ pourra avoir également pour valeur ou 2, ou 3, ou 5; on n'a qu'à former ces trois équations simples,

$x - 2 = 0$; $x - 3 = 0$; $x - 5 = 0$,

multipliant ensuite les deux premieres l'une par l'autre, et leur produit par la troisieme, on a $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, dans laquelle on peut supposer également $x = 2$, ou $= 3$, ou $= 5$. On voit aisément que chacune de ces valeurs étant substituée à la place de $x$ dans l'équation $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, doit la résoudre, ou, ce qui revient au même, en doit faire évanouir tous les termes; car cette équation pouvant s'écrire ainsi $\overline{x-2} \times \overline{x-3} \times \overline{x-5} = 0$, chacune de ses parties étant égalée à zéro, doit, à cause qu'elle multiplie toutes les autres, les faire évanouir en même-temps : or la supposition de $x = 2$, ou $= 3$, ou $= 5$ rend

toujours zéro l'une des trois parties $x - 2$, $x - 3$, $x - 5$.

II.

Une Equation a autant de racines que de degrés.

Par cette méthode on voit comment une équation peut avoir autant de racines que de degrés; pour traiter la question plus en général, soient $a$, $b$ $c$, $d$, $e$, les racines d'une équation, et partant $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, $x - d = 0$, $x - e = 0$, les équations simples qui composent l'équation dont les racines sont ces quantités. En multipliant toutes ces équations les unes par les autres, on aura

$$x^5 - ax^4 + abx^3 - abcx^2 + abcdx - abcde$$
$$- b + ac - abd + abce$$
$$- c + ad - abe + abde$$
$$- d + ae - acd + acde$$
$$- e + bc - ace + bcde$$
$$+ bd - ade$$
$$+ be - bcd$$
$$+ cd - bce$$
$$+ ce - bde$$
$$+ de - cde$$

pour l'équation dans laquelle $x$ peut avoir à-la-fois les valeurs données $a$, $b$, $c$, $d$, $e$.

III.

Propriété des Equations de tous les degrés.

Il est aisé de tirer de cette équation, ces remarques générales sur les équations de tous les degrés.

1°. Que le premier terme n'est autre chose que l'inconnue élevée à la puissance exprimée par le nombre des racines, sans coëfficient.

Que le second terme contient l'inconnue élevée à une puissance de moins avec un coëfficient égal à la somme des racines.

Que dans le troisieme, l'inconnue se trouve élevée à deux puissances de moins, et a pour coëfficient la somme de tous les produits deux à deux qu'on peut faire de toutes les racines.

Que dans le quatrieme, on aura de même l'inconnue élevée à trois puissances de moins avec un coëfficient qui exprime la somme des produits de toutes les racines prises trois à trois.

Il sera ainsi des autres termes jusqu'au dernier, qui n'aura aucune puissance de $x$, mais qui sera le produit de toutes les racines les unes par les autres. Ces remarques ont servi de base en beaucoup de rencontres, soit pour trouver les racines des équations proposées, soit du moins pour connoître plusieurs de leurs propriétés.

IV.

On a tiré, par exemple, de ces remarques qu'une équation, comme $x^5 - 3x^3 + 4x^2 + 7x - 3 = 0$ manquant de second terme, doit avoir nécessairement des racines positives et des négatives, de plus, que la somme des unes doit être égale à la somme des autres;

**Dans une Equation sans second terme, la somme des racines positives est égale à celle des négatives.**

car, sans cette condition, elles ne se seroient pas détruites pour faire évanouir le second terme. Ainsi, dans une équation du troisieme degré, où le second terme manquera, il y aura toujours ou une racine négative égale aux deux positives, ou une racine positive égale aux deux négatives.

V.

Une Equation qui n'a point de terme connu a au moins une racine égale à zéro.

On a tiré encore des mêmes remarques que lorsqu'une équation n'aura pas de dernier terme, il faudra qu'il y ait au moins une racine égale à zéro; ce qu'on auroit pû reconnoître aussi, en faisant attention qu'une équation telle que $x^3 + 5x^2 + 3x = 0$ qui manque de terme connu peut toujours se diviser par $x = 0$.

VI.

Conditions qu'il faut observer dans une Equation pour y trouver les propriétés précédentes

Lorsqu'on voudra retrouver dans une équation les propriétés qu'on vient d'énoncer, on voit bien qu'il faudra que tous les termes de cette équation soient du même côté, qu'ils soient ordonnés par rapport à l'inconnue, et que cette inconnue n'ait d'autre coëfficient que l'unité au premier terme. De plus, que si quelqu'une des puissances de $x$ manque dans l'équation, il faudra toujours prendre pour quantieme des autres termes ceux qu'ils auroient, si ces puissances ne manquoient pas; par exemple, dans l'équation $x^5 - 3x^3 + 4x - 5 = 0$, le terme $3x^3$ n'est que le troisieme, parce que le second manque; et le terme $4x$ est le

cinquieme, parce que le quatrieme manque. Si on vouloit donc appliquer les remarques précédentes à une telle équation, on diroit que la somme de ces cinq racines est nulle, c'est-à-dire, qu'elle a nécessairement des racines négatives et des racines positives, et que la somme des premieres est égale à la somme des autres. On diroit encore que la somme des produits de toutes les racines deux à deux est égale à $-3$; que la somme de tous les produits trois à trois est 0, que la somme de tous les produits quatre à quatre est $+4$, qu'enfin le produit de toutes les racines est $-5$.

## VII.

Méthode pour avoir les racines commensurables d'une Equation.

De la propriété qu'a le dernier terme d'une équation d'être égal au produit de toutes les racines, on peut tirer une méthode d'avoir toutes les racines qui sont commensurables dans une équation : car elles doivent toutes se trouver en tentant la division de l'équation par $x$ plus ou moins chacun des diviseurs du dernier terme.

Par exemple, qu'on ait l'équation $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$, les diviseurs du terme $-3$, ne pouvant être que $-1$, $-3$, $+1$, $+3$; je tente la division par $x-1$, $x-3$, $x+1$, $x+3$; elle réussit par $x-1$ et par $x-3$, et je vois que l'équation proposée auroit pû s'écrire ainsi $\overline{x-1} \times \overline{x-1} \times \overline{x-3} = 0$, ce qui m'apprend qu'elle a trois racines, dont

l'une est + 3, et les autres, toutes deux égales, sont chacune + 1.

Lorsqu'une équation ne pourra se diviser par aucune équation simple, composée de $x +$ ou — quelqu'un des diviseurs du dernier terme, on sera sûr que cette équation n'aura aucune racine commensurable.

## VIII.

Il se présente contre cette méthode de trouver les racines commensurables, une difficulté qui, au premier coup-d'œil, paroît assez considérable ; c'est que si quelque racine de cette équation étoit une fraction, on ne sauroit pas comment la trouver parmi les diviseurs du dernier terme : parce qu'en admettant des diviseurs fractionnaires dans un nombre, on en peut trouver à l'infini. Mais il est aisé de répondre à cette difficulté, en faisant remarquer que tous les coëfficiens d'une équation étant des nombres entiers, il est impossible que l'inconnue ait pour valeur une fraction. Je crois que ceux qui possèdent un peu l'arithmétique des fractions reconnoîtroient sans secours la vérité de cette proposition ; mais pour leur faciliter les moyens de s'en assurer, prenons pour exemple une équation comme $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, dans laquelle $a$, $b$, $c$, sont supposés des nombres entiers. Il est évident que $x$ étant une fraction, $x^3$, $x^2$, en seront aussi, et que jamais la fraction qui exprime $x^3$

Dans une Equation dont tous les coefficiens sont des entiers, l'inconnue ne sauroit être une fraction

ne pourra se réduire à une qui ait le même dominateur que $x^2$ ou son multiple $a\,x^2$. A plus forte raison la même fraction ne pourra pas non plus se réduire au même dénominateur que $x$, ou son multiple $b\,x$. Donc $x^3 + a\,x^2 + b\,x$ ne pourra jamais faire une fraction plus simple que $x^3$ qui est irréductible. Donc $x$ ne peut jamais être une fraction dans de telles équations.

## IX.

Lorsqu'on aura une équation dont les coëfficiens seront des fractions, on ne pourra pas, en la laissant avec ses fractions, trouver par la méthode précédente les racines commensurables qu'elle pourroit avoir; mais on pourra toujours, par une transformation assez simple, changer le problême en un autre, où l'équation à résoudre n'aura plus de fractions, sans donner de coëfficient au premier terme.

Transformation par laquelle on fait évanouir les fractions d'une Equation quelconque.

Soit, par exemple, l'équation.....

$$x^3 + \frac{a}{b}x^2 + \frac{c}{d}x + \frac{e}{f} = 0$$

(on voit qu'une équation d'un degré plus élevé n'auroit pas plus de difficulté) en faisant l'inconnue $x$ égale à une autre inconnue $y$ divisée par quelque nombre indéterminé $m$, je change l'équation en une nouvelle

$$\frac{y^3}{m^3} + \frac{a\,y^2}{b\,m^2} + \frac{c\,y}{d\,m} + \frac{e}{f} = 0,$$

ou $$y^3 + \frac{a\,m}{b}y^2 + \frac{c\,m^2}{d}y + \frac{e\,m^3}{f} = 0,$$

dans laquelle je vois que si $m$ est divisible à la fois par $b$, par $d$ et par $f$; $\frac{am}{b}$, $\frac{cm^2}{d}$ et $\frac{em^3}{f}$ seront des nombres entiers. Or, le problême est réduit par-là à quelque chose de bien aisé; car on est au moins sûr de réussir en prenant pour $m$ le produit des nombres $b$, $d$, $f$, et si ces nombres ne sont pas premiers (1) entr'eux, on trouvera aisément un nombre plus petit que leur produit qui sera divisible par tous les trois.

X.

Par cette transformation la méthode précédente s'applique aux Equations fractionnaires.

L'équation étant changée en une autre, sans fraction, on cherchera les racines commensurables de cette derniere par la méthode précédente; et si elle n'en a pas, on sera sûr que la premiere n'en avoit pas non plus, puisque $x$, supposé commensurable, ne pourra jamais donner une quantité incommensurable en le divisant par le nombre $m$, qui est commensurable aussi.

XI.

Inconvénient de la méthode précédente.

La méthode précédente a cet inconvénient considérable, que lorsqu'il arrive que le dernier terme a beaucoup de diviseurs, les calculs qu'il faut faire pour tenter toutes les divisions

(1) On appelle en Arithmétique nombres premiers ceux qui n'ont point de diviseurs, tels que 5, 11, 31, etc. et on dit que deux nombres sont premiers entre eux lorsqu'ils n'ont aucun commun diviseur; tels sont 21 et 16, 18 et 35.

que cette méthode prescrit sont si longs, qu'on l'abandonneroit malgré l'avantage infini de s'étendre généralement aux équations de tous les degrés, dont une ou plusieurs racines sont commensurables. C'est ce qui a engagé les plus habiles analystes à perfectionner cette méthode, en trouvant des moyens plus faciles que la division pour reconnoître les diviseurs qui ne doivent pas réussir. Voici comment on s'y est pris.

## XII.

Réflexions qui ont servi à perfectionner cette méthode.

On a d'abord remarqué que si on faisoit dans la racine $x + a$ d'une équation quelconque, ou, ce qui revient au même, dans le diviseur $x + a$ d'une quantité quelconque, $x$ égal à un nombre donné, le nombre dans lequel se changeoit alors la racine devoit être un diviseur de la quantité proposée, dans laquelle on auroit fait $x$ égal au même nombre : c'est-à-dire, par exemple, que si on a la quantité $x^3 - 2x - 21$ dont on sait que $x - 3$ est un diviseur, il arrivera qu'en faisant $x = 5$ le nombre 94 que devient $x^3 - 2x - 21$ par cette supposition, est nécessairement divisible par le nombre 2 que devient $x - 3$ par la même supposition.

En partant de-là on a supposé dans la quantité dont on cherchoit un diviseur, $x$ successivement égal à plusieurs nombres, tels, par exemple, que $+1$, $0$, $-1$; suppositions

qui devoient être faites les premieres, parce qu'elles donnent les substitutions les plus faciles. Ensuite on a cherché tous les diviseurs des nombres dans lesquels la quantité proposée se change par ces substitutions, et on a fait ces remarques qui se présentoient naturellement après la premiere.

1°. Que parmi tous les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x = +1$ dans la quantité, on devoit trouver le nombre $1 + a$, puisque $x + a$ étoit le diviseur cherché.

2°. Que parmi tous les diviseurs venus par la supposition de $x = 0$, qui ne sont autre chose que les diviseurs du dernier terme de la quantité proposée, devoit être le nombre $a$.

3°. Que parmi tous les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x = -1$, devoit être le nombre $-1 + a$.

## XIII.

Principe fondamental pour trouver les racines commensurables

Or, comme les nombres $1 + a$, $a$, $-1 + a$ sont nécessairement tels que le premier surpasse le second d'une unité, et que le second surpasse le troisieme d'une unité aussi, il étoit aisé de tirer de-là ce principe, que de tous les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x = 0$, aucun ne pouvoit être le nombre demandé $a$, s'il ne se trouvoit en même-temps surpassé de l'unité par quelqu'un des diviseurs du nombre venu par la supposition de $x = 1$, et s'il ne surpassoit en même-temps d'une unité quelqu'un

quelqu'un des diviseurs du nombre qu'a donné la supposition de $x = -1$. On voit bien qu'un tel principe doit faire éviter beaucoup de divisions inutiles dans la recherche des racines commensurables.

Si on trouve plusieurs nombres, parmi les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x = 0$, qui ayent les conditions qu'on vient de remarquer, on fera ensuite $x = 2$, et on verra si parmi les diviseurs des nombres qui viennent alors, on trouve des nombres qui surpassent d'une unité ceux qu'a donné la supposition de $x = 1$, et ainsi de suite.

Au reste, on voit bien que l'examen qu'on fait de tous ces diviseurs doit être double, c'est-à-dire, que chacun d'eux doit être pris aussi bien en — qu'en +.

## XIV.

Pour éclaircir cette méthode et pour en faciliter l'usage, nous allons en donner quelques exemples en faisant voir l'ordre qu'il faut garder dans le calcul pour ne s'y point tromper, et pour abréger, autant qu'il est possible, la peine du calculateur.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Soit l'équation $x^3 - 2x^2 - 13x + 6 = 0$, dont il s'agit de trouver les racines commensurables, ou, ce qui revient au même, soit la quantité $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$, dont on demande les diviseurs du premier degré.

Je commence par écrire (voyez la table ci-jointe, case 1) l'une sous l'autre les supposi-

tions 1, 0, — 1 que je veux faire pour $x$; j'écris ensuite à côté de chacun de ces nombres les nombres — 8, + 6, + 16, ou simplement 8, 6, 16 (à cause que les signes sont indifférens pour les diviseurs) dans lesquels se change successivement la quantité $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$ par ces suppositions, et je les sépare des premiers nombres par une barre verticale. J'écris dans une troisieme colonne les nombres 1, 2, 4, 8; 1, 2, 3, 6; 1, 2, 4, 8, 16, qui sont les diviseurs des nombres précédens; les quatre premiers à côté de 8 dont ils sont les diviseurs, les quatre seconds à côté de 6, et les cinq derniers à côté de 16.

Cela posé, pour trouver parmi les diviseurs 1, 2, 3, 6, du nombre 6 venu par la supposition de $x = 0$, celui qu'il faut ajouter ou retrancher à $x$ pour avoir le diviseur cherché, ou plutôt pour exclure de tous ces diviseurs ceux qui n'ont pas les conditions requises, je commence par remarquer que 1 qui est le premier de ces diviseurs, ne sauroit être admis, soit qu'on le prenne en +, soit qu'on le prenne en —; car si on le prend en +, c'est-à-dire, si on regarde $x + 1$ comme le diviseur cherché, 2 seroit ce que deviendroit ce diviseur par la supposition de $x = +1$, et 0, ce qu'il deviendroit par la supposition de $x = -1$, et par conséquent il faudroit trouver à-la-fois 2 dans les nombres de la premiere bande, et 0 dans ceux de la troisieme: or, la seconde de

ces conditions n'est pas remplie. Quant à ce que — 1 ne convient pas non plus, c'est-à-dire, que $x$ — 1 n'est pas le diviseur cherché, cela se tire de ce que ce diviseur devenant 0 par la supposition de $x = +1$, et — 2 par la supposition de $x = -1$, il faudroit par conséquent trouver 0 dans les nombres de la premiere bande, et le nombre 2 dans ceux de la troisieme. Or, il n'y a que la seconde de ces deux conditions qui ait lieu. Je vois ensuite que le diviseur 2 est aussi dans le cas d'être rejetté, parce que si on le prend en +, c'est-à-dire, si on regarde $x + 2$ comme le diviseur cherché, on auroit + 3 par la supposition de $x = 1$, et + 1 par la supposition de $x = -1$, ce qui demanderoit qu'on trouvât les nombres 3 dans la premiere bande, et 1 dans la troisieme : or, la premiere de ces deux conditions ne se trouve pas remplie. Et si l'on prenoit 2 en —, c'est-à-dire, qu'on voulût que $x$ — 2 fût le diviseur, on auroit alors — 1 et — 3 pour les suppositions de $x = +1$ et de $x = -1$, ce qui demanderoit de trouver à-la-fois 1 dans la premiere bande et 3 dans la troisieme, conditions dont il n'y a que la premiere qui ait lieu.

Ayant exclu 1 et 2, je prends le diviseur 3, et je vois qu'en le prenant en +, c'est-à-dire, en regardant $x + 3$ comme le diviseur cherché, il faudra trouver + 4 par la supposition de $x = +1$, et + 2 par la supposition de

$x = -1$. Or, je trouve effectivement 4 dans la premiere bande, et 2 dans la troisieme. Donc + 3 a les conditions requises, je l'écris alors à la seconde bande, c'est-à-dire, vis-à-vis le nombre dont il est diviseur, et j'écris en même-tems les nombres + 4 et + 2 dans les bandes supérieures et inférieures; non que ces nombres soient à joindre à $x$ pour servir de diviseurs à la quantité proposée, mais parce que n'ayant pas encore achevé l'examen des diviseurs, il se pourroit trouver encore d'autres nombres que + 3 qui auroient les conditions requises; et qu'il faudroit alors faire de nouvelles suppositions pour reconnoître entre ces nombres ceux qu'il faudroit encore exclure. J'examine maintenant si 3 pris en — ne pourroit pas réussir aussi bien qu'en +, c'est-à-dire, si $x - 3$ ne pourroit pas avoir les mêmes conditions pour être diviseur de la proposée, il faudroit pour cela trouver — 2 et — 4 par les suppositions de $x = +1$ et de $x = -1$; or ces nombres se trouvent effectivement; donc jusqu'à présent $x - 3$ a aussi-bien les conditions nécessaires pour être diviseur que $x + 3$, j'écris par conséquent dans une cinquième colonne verticale — 2, — 3, — 4.

Je passe enfin à l'examen de 6 et je vois que si je le prends en +, il faudroit trouver + 7 et + 5 dans les bandes supérieures et inférieures, ce qui n'arrive pas, et que

si je le prends en — je devrois avoir — 5 et — 7 dans les mêmes bandes, ce qui ne se trouve pas non plus. Je conclus donc qu'il n'y a que $x - 3$ et $x + 3$ qui puissent être des diviseurs commensurables et du premier degré de la proposée.

Pour savoir si l'on est autant fondée à tenter la division par $x - 3$, que par $x + 3$; je remarque que si on faisoit une quatrieme bande en supposant $x = -2$, on devroit trouver — 5 pour le quatrieme terme de la colonne $-2, -3, -4$; et + 1 pour le quatrieme terme de la colonne $+4, +3, +2$; car il est clair que le diviseur $x - 3$ deviendroit — 5 par la supposition de $x = -2$, et que le diviseur $x + 3$ deviendroit + 1 par la même supposition. Mais en faisant $x = -2$ dans la proposée $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$, elle devient 16 qui n'est pas divisible par 5, et qui l'est par 1. Donc $x - 3$ ne sauroit être un diviseur de cette quantité, donc s'il y en a un, il ne peut-être que $x + 3$, ou, ce qui revient au même, si $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$ a une racine commensurable, elle ne peut être que — 3. Pour savoir si elle l'a effectivement, je divise $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$ par $x + 3$, ce qui réussit, et donne pour quotient exact $xx - 5x + 2$.

XV.

Pour que l'uniformité servit à la clarté dans cet exemple, j'ai examiné parmi les diviseurs

1, 2, 3, 6 du nombre 6 venu par la supposition de $x = 0$, le nombre 1 comme les autres; mais on peut toujours se dispenser de faire aucun examen pour ce nombre, parce que s'il avoit à réussir, soit en +, soit en —, on l'auroit appris déjà en substituant + 1 et — 1 à la place de $x$ dans l'équation donnée.

Dans des nombres aussi simples que 8, 6, 16, il étoit aisé de ne pas oublier aucun de leurs diviseurs, parce que ces nombres en ont peu. Mais lorsque l'on a des nombres qui ont beaucoup de diviseurs, il faut les chercher avec un certain ordre pour les avoir tous. Un seul exemple suffira pour faire voir comment cette opération doit se faire.

XVI.

Manière d'avoir tous les diviseurs d'un nombre

Soit proposé de chercher tous les diviseurs du nombre 120. Je commence par tracer une barre verticale ( voyez la case 2, table suivante ) à gauche de ce nombre, puis je mets à gauche de cette barre à la hauteur de 120, l'unité comme étant son premier diviseur. J'essaye ensuite de diviser 120 par 2, comme la division réussit, j'écris 2, et je le mets à gauche de la barre à la même hauteur de 60 quotient de la division que je mets à la droite de la même barre.

J'essaye encore la division par 2, qui réussit, et donne 30 pour quotient, je mets alors le nouveau diviseur 2 sous le premier, et 30 sous

60. Je multiplie en même-temps le nouveau diviseur 2 par celui d'en haut 2, et je mets le produit 4 à gauche du second 2, comme étant un nouveau diviseur du nombre proposé 120. La raison de cette multiplication est que si 120 est divisible par 2, et sa moitié par 2, il doit l'être nécessairement par 4.

Comme 30 peut se diviser par 2, j'écris encore 2 à gauche de la barre et à la quatrieme ligne, et le quotient 15 à droite sur la même ligne. Je multiplie en même-temps le nouveau diviseur 2 par 4, ce qui me donne 8 pour un nouveau diviseur du nombre proposé. Je ne multiplie pas ce nouveau 2 par les premiers, parce qu'il en viendroit 4 qui est déjà écrit.

15 ne pouvant se diviser par 2, j'essaye de le diviser par 3, ce qui me réussit et me donne 5 pour quotient que j'écris à droite dans la cinquieme ligne aussi bien que le diviseur 3 que j'écris à gauche; je multiplie ensuite 3 par 2, par 4 et par 8 que je trouve dans les bandes supérieures, et j'écris à gauche du 3 les produits 6, 12, 24, qui sont, comme il est évident, des nouveaux diviseurs du nombre proposé.

5 n'ayant plus d'autres diviseur que lui-même, je l'écris à gauche de la barre dans la cinquieme ligne, et je mets en même-temps le produit de ce nombre par tous les diviseurs précédens 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, et j'ai 10, 15,

20, 30, 40, 60, 120, que j'écris dans la même ligne à gauche de 5.

Cela fait, tous les nombres qui sont à gauche de la barre, à compter depuis 1 jusqu'à 120 sont les diviseurs de 120. Il en seroit ainsi des autres nombres dont on chercheroit tous les diviseurs.

## XVII.

Autre exemple de la méthode de trouver les racines commensurables

Soit proposé présentement de chercher les racines commensurables de l'équation $x^5 - 12x^4 + 5x^3 - 61x^2 + 22x - 120 = 0$.

Ayant écrit dans une premiere colonne verticale 1, 0, — 1 (table suivante, case 3) pour les valeurs à donner successivement à $x$; et dans une autre colonne verticale les nombres 165, 120, 221 qu'on trouve par la substitution de ces valeurs dans la quantité $x^5 - 12x^4 + 5x^3 - 61x^2 + 22x - 120$, je place dans une troisieme colonne les diviseurs de ces trois nombres, ce qui me donne les trois bandes

1, 3, 5, 11, 15, 33, 55, 165,
1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 30, 40, 60, 120,
1, 13, 17, 221

que je place chacune vis-à-vis du nombre qui l'a produite : cela fait parmi les diviseurs de 120, j'examine en premier lieu, si le nombre 2 a les conditions requises, et je vois qu'en le prenant en + il s'accorde avec les nombres 3 et 1 pris en haut et en bas. J'écris donc dans la quatrieme colonne verticale + 3, + 2, + 1.

Je vois ensuite que le même nombre pris en — ne réussit pas, parce qu'il faudroit alors — 3 en bas, ce qui ne se trouve pas.

Parcourant ensuite de la même maniere tous les autres diviseurs de 120, je trouve encore le nombre 12 qui étant pris en — a les conditions requises, pourvû qu'on prenne en — les nombres 11 et 13 qui sont au-dessus et au-dessous. J'écris donc dans une cinquieme colonne verticale les trois nombres — 11, — 12, — 13.

Pour savoir présentement à laquelle des deux dernieres colonnes je dois m'arrêter, ou plutôt, par laquelle des deux quantités $x + 2$ ou $x - 12$ je dois tenter la division, je remarque que si c'étoit la premiere, il faudroit trouver zéro en substituant — 2 pour $x$ dans l'équation, ce qui n'arrive pas : donc il n'y a que la division par $x -$ 12 à tenter, je la tente, et elle réussit, en me donnant pour quotient $x^4 + 5x^2 - x + 10$. Ainsi + 12 est une des valeurs de $x$ dans l'équation donnée et la seule commensurable.

## XVIII.

**Troisième application de la méthode de trouver les racines commensurables**

Soit enfin $x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 5x^2 + 11x + 36$. Ayant écrit ( case 4, table suivante ) dans une premiere colonne verticale les valeurs 1, 0, — 1 à donner à $x$; dans une seconde les nombres 30, 36, 40, dans lesquels la quantité proposée se change par ces supposi-

tions, et dans une troisieme tous les diviseurs 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 du nombre 30; les diviseurs 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 du nombre 36; les diviseurs 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40 du nombre 40; je trouve parmi tous ces diviseurs quatre colonnes qui renferment les conditions requises, la premiere, + 3, + 2, + 1, la seconde, — 2, — 3, — 4, la troisieme, — 3, — 4, — 5, la quatrieme, + 10, + 9, + 8.

Pour décider alors entre ces quatre colonnes, je commence par faire $x = 2$, et j'écris 2 au-dessus de 1 dans la premiere colonne, j'écris ensuite dans la seconde colonne 74, nombre dans lequel la quantité proposée se change par la supposition de $x = 2$. Cela fait, je vois, sans me donner la peine de chercher les diviseurs de ce nombre, que les deux colonnes + 3, + 2, + 1, et + 10, + 9, + 8, sont à rejetter; car si la premiere avoit lieu, il faudroit trouver + 4 parmi les diviseurs de 74, ce qui n'arrive pas, et si c'étoit la seconde, il faudroit trouver + 11 parmi les mêmes diviseurs, ce qui n'arrive pas non plus.

Je vois, au contraire, que les nombres — 1 et — 2 que demandent les colonnes — 2, — 3, — 4, et — 3, — 4, — 5 sont des diviseurs de 74, j'écris donc les nombres — 1 et — 2 au-dessus de — 2 et de — 3 dans la seconde et la troisieme colonne, et je cherche ensuite à exclure encore une de ces deux colonnes — 1,

$-2, -3, -4$, et $-2, -3, -4, -5$, ce qui devient bien facile, puisque si la premiere étoit à conserver, il faudroit trouver 0 par la supposition de $x = 3$, ce qui n'arrive pas; au lieu que $-1$ qui, pour la colonne $-2$, $-3$, $-4$, $-5$ doit être un diviseur du nombre donné dans la supposition de $x = 3$, ne peut pas manquer de l'être. Donc il n'y a de colonne à essayer que $-1$, $-2$, $-3$, $-4$, $-5$, c'est-à-dire, qu'il n'y a de diviseur à tenter que $x - 4$. J'essaye en effet la division de la quantité proposée par $x - 4$, ce qui réussit et donne pour quotient $x^5 + 3x^3 - 5x - 9$. Ainsi $+4$ est une des deux valeurs de $x$ dans l'équation proposée et la seule commensurable.

## XIX.

Après avoir vû comment on pouvoit tirer des équations d'un degré quelconque, les équations commensurables du premier qui en étoient les racines, il étoit naturel de chercher aussi à en tirer les équations du second degré qu'elles pouvoient renfermer: on devoit s'en promettre une aussi grande utilité, la solution des équations du second degré étant aussi complette que celle du premier.

Méthode pour trouver les équations du second degré commensu-

Voici la méthode qu'on a imaginée pour y parvenir. Que $xx + bx + c = 0$ représente l'équation du second degré qui peut être un des produisans d'une équation donnée, ou ce

rables dans une Equation donnée

qui revient au même, que $x\,x + b\,x + c$, soit le diviseur cherché d'une quantité donnée; en faisant $x = 0$ dans ce diviseur, il est clair qu'il se réduira au nombre $c$, et que ce nombre sera un des diviseurs du dernier terme de la quantité donnée.

Si on fait ensuite $x = +1$ dans le diviseur $x^2 + b\,x + c$, il se changera en $1 + b + c$ qui sera un des diviseurs du nombre que l'on a en faisant de même dans la proposée $x = 1$. Donc si on cherche tous les diviseurs de ce nombre, et qu'après les avoir pris tant en + qu'en —, on en retranche l'unité, ce sera parmi tous les nombres, tant positifs que négatifs, que l'on aura par cette opération, que devra se trouver le nombre égal à $b + c$.

Si on fait ensuite $x = -1$ tant dans la quantité proposée, que dans le diviseur $x^2 + b\,x + c$, qui devient alors $1 - b + c$, on voit qu'en cherchant tous les diviseurs du nombre que devient cette quantité par cette supposition, pris tant en — qu'en +, on aura parmi tous les nombres que ce calcul donnera celui qui exprime $-b + c$.

Or, comme $c$ est moyen arithmétique entre $b + c$ et $-b + c$, il s'en suit que parmi les trois suites de nombres qu'on aura pour représenter $b + c$, $c$, $-b + c$, il ne faudra s'arrêter qu'à ceux qui seront en progression arithmétique. Lorsqu'on aura trouvé trois nombres en progression arithmétique, il est clair que

celui qui répondra à la supposition de $x = 0$, sera celui qu'il faudra prendre pour $c$; et comme celui qui répondra à la supposition de $x = 1$ représentera $b + c$, il est clair qu'en retranchant le premier du second, on aura $b$. Substituant ensuite ces deux nombres à la place de $b$ et de $c$ dans $x^2 + b\,x + c$, on aura un diviseur à tenter pour la quantité donnée, et le seul à essayer si on n'a trouvé qu'une progression arithmétique pour toutes les suites des nombres qu'ont donné les diviseurs de la quantité où l'on a fait successivement $x = 1, 0, -1$. Si on a trouvé plusieurs progressions arithmétiques, on se déterminera entre ces progressions à-peu-près comme dans le cas des diviseurs simples, en faisant de nouvelles suppositions pour $x$, comme $-2, -3$, ou $+2, +3$, etc.

Car qu'on suppose, par exemple, $x = -2$, $x = -3$, etc. dans la quantité proposée, il est clair que tous les diviseurs, tant positifs que négatifs du nombre que l'on aura alors, représenteront la quantité $4 - 2\,b + c$, ou $9 - 3\,b + c$, etc. que devient $x^2 + b\,x + c$, lorsque $x = -2$, ou $x = -3$, etc. et que par conséquent tous ces mêmes diviseurs dont on aura retranché $4, 9$, etc. représenteront $-2\,b + c$, $-3\,b + c$, etc. Or, $-2\,b + c$, $-3\,b + c$, etc. étant d'autres termes de la progression arithmétique $b + c, c, -b + c$, on n'aura donc plus qu'à chercher parmi les pro-

gressions arithmétiques trouvées précédemment, celle qui se conserve par ces nouvelles valeurs de $x$, et s'en servir, comme on vient de l'expliquer, pour déterminer les nombres $b$ et $c$.

XX.

Application de la méthode précédente.

Soit, par exemple, la quantité $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 36x + 21$, dont on cherche un diviseur du second degré.

Je commence par écrire dans une colonne verticale ( table suivante, case 5 ) les valeurs 1, 0, — 1 que je veux donner à $x$. J'écris ensuite dans une seconde colonne verticale, les nombres 1, 21, 65, dans lesquels la quantité proposée se change par ces suppositions.

J'écris de même dans une troisieme colonne, à côté du premier nombre, son unique diviseur 1; à côté de 21, ses diviseurs 1, 3, 7, 21; et à côté de 65 ses diviseurs 1, 5, 13, 65.

Cela fait, j'écris dans une quatrieme colonne les nombres 1, 0, 1 quarré de 1, 0, — 1, écrits dans la premiere colonne et valeurs de $x\,x$, par conséquent, dans les mêmes suppositions de 1, 0, — 1. Enfin, je forme une cinquieme colonne par ces conditions;

1°. Que la premiere bande — 2, 0 se forme en retranchant 1 de 1 pris en —, et de 1 pris en +.

2°. Que la seconde bande soit composée des nombres — 21, — 7, — 3, — 1, + 1, + 7,

+ 21, les mêmes que le diviseurs qui sont à côté, mais écrits deux fois, l'une pour le signe —, l'autre pour le signe +.

3°. Que les nombres de la troisieme bande soient — 66, — 14, — 6, — 2, 0, + 4, + 12, + 64, dont les premiers — 66, — 14, — 6, — 2 soient trouvés en retranchant 1 des nombres 65, 13, 5, 1 pris en —, et les autres 0, + 4, + 12, + 64 en retranchant 1 des mêmes nombres 1, 5, 13, 65 pris en +.

Pour déterminer ensuite les progressions arithmétiques qui sont dans ces trois suites de nombres, je commence par prendre dans la premiere bande le nombre — 2 pour le premier terme d'une progression, et je prends successivement pour seconds tous ceux de la seconde bande; je cherche en même-temps les troisiemes termes que ces premiers donneroient, et j'examine quels sont ceux de ces troisiemes qui se trouvent dans la troisieme bande : or, — 2 et — 21 doivent donner pour troisieme terme — 40 qui n'est point dans la troisieme bande, je rejette donc 21; je prends alors — 7 pour le second terme, et comme il devroit donner — 12 pour troisieme terme, et que — 12 n'est pas dans la troisieme bande, je rejette encore — 7, et de même — 3, parce que ce dernier devroit donner — 4 qui ne se trouve pas non plus.

A l'égard de — 1, comme il donne 0 pour troisieme, et que 0 se trouve dans la troisieme

bande, j'écris dans la sixieme colonne la progression — 2, — 1, 0. De même + 1 pris pour second, donnant + 4 qui se trouve encore, j'écris la seconde progression — 2, + 1, + 4. Et comme + 7 et + 21 devroient donner chacun un troisieme terme qui n'est pas dans la troisieme bande, je les rejette. Les progressions qui peuvent commencer par 2, étant déterminées, je passe à celles dont le premier terme seroit 0, et pour les trouver, je prends, ainsi que j'ai fait pour 2, tous les nombres de la seconde bande l'un après l'autre.

Je vois d'abord que — 21 devroit donner pour troisieme terme — 42, qui n'est pas dans la troisieme bande: je vois ensuite que — 7 donne — 14 qui se trouve; ainsi j'écris encore la progression 0, — 7, — 14. De même — 3 et — 1 donnant — 6 et — 2, qui se trouvent aussi, j'écris les progressions 0, — 3, — 6, et 0, — 1, — 2. A l'égard des nombres + 1, + 7, + 21, ils ne donnent aucun troisieme terme qui se trouve, ainsi je les rejette.

Pour voir présentement lesquelles de ces progressions il faut encore rejetter, je fais $x = -2$, et j'écris — 2 dans la premiere colonne; en observant de mettre en même-temps, 1°. dans la seconde colonne, 125 que donne la quantité proposée par cette valeur de $x$. 2°. Dans la troisieme les nombres 1, 5, 25, 125, diviseurs de 125. 3°. Dans la quatrieme colonne le nombre 4 quarré de — 2 et valeur

de

de $x\,x$ dans cette supposition. 4°. Dans la cinquieme colonne les nombres — 129, — 29, — 9, — 5 que l'on a en retranchant 4 des nombres 125, 25, 5, 1, pris en —, et les nombres — 3, + 1, + 21, + 121 que l'on a en retranchant 4 des mêmes nombres 1, 5, 25, 125, pris en +.

Par ce moyen, je vois que les deux progressions — 2, + 1, + 4, et 0, — 7, — 14, sont à rejetter, parce qu'elles devroient donner pour quatrieme terme + 7 et — 21 qui ne se trouvent pas dans la quatrieme bande.

Mais les trois progressions — 2, — 1, 0; 0, — 3, — 6; 0, — 1, — 2, devant donner pour quatriemes termes + 1, — 9, — 3 qui se trouvent dans cette quatrieme bande, j'ai besoin d'une nouvelle supposition pour exclure au moins une de ces trois progressions.

Je fais donc $x = -3$, ce qui me donne 147 pour le nombre dans lequel se change la quantité proposée par cette supposition. J'écris donc 147 dans la seconde colonne, et à côté, dans la troisieme, ses diviseurs 1, 3, 7, 21, 49, 147; je mets de même dans la quatrieme colonne 9 quarré de — 3, ou la valeur de $x\,x$ dans la nouvelle supposition; enfin j'écris dans la cinquieme colonne les nombres — 156, — 58, — 30, — 16, — 12, — 10, — 8, — 6, — 2, + 12, + 40, + 138, que l'on a en retranchant 9 des nombres 1, 3, 7, 21, 49, 147, pris en — et en +.

Par-là je trouve que les progressions — 2, — 1, 0, + 1, et 0, — 1, — 2, — 3, doivent être rejettées, et qu'au contraire il faut conserver la progression 0, — 3, — 6, — 9; car les deux cinquiemes termes des premieres progressions doivent être + 2 et — 4 qui ne se trouvent pas dans la cinquieme bande, au lieu que le cinquieme terme de la progression 0, — 3, — 6, — 9 est — 12 qui s'y trouve.

Après avoir réduit toutes les progressions à la seule 0, — 3, — 6, etc. je prends dans cette progression le nombre — 3 qui, dans la sixieme colonne, répond à la supposition de $x = 0$, pour exprimer le terme $c$ du diviseur cherché $x\,x + b\,x + c$. Je prends ensuite, toujours dans la sixieme colonne, 0 qui répond à la supposition de $x = 1$, et qui, suivant les principes précédens, doit être $b + c$; ainsi retranchant $c$ ou — 3, de 0 ou $b + c$, j'ai + 3 pour $b$, et partant le diviseur cherché $x^2 + b\,x + c$ est $x\,x + 3\,x - 3$, s'il y en a un du second degré.

Pour savoir ce qui en est, je divise la quantité proposée $x^5 + 3\,x^4 + 2\,x^3 + 8\,x^2 - 36\,x + 21$ par $x\,x + 3\,x - 3$, et je trouve qu'en effet la division est exacte, et donne pour quotient $x^3 + 5\,x - 7$.

## XXI.

Autre application de la méthode précédente.

Soit présentement la quantité $x^4 + 6\,x^3 + 11\,x^2 + 10\,x + 5$, je commence par écrire

( table ci-jointe, case 1 ) dans une premiere colonne verticale les valeurs 2, 1, 0, — 1, — 2 que je veux donner à $x$. J'écris ensuite dans la seconde colonne verticale les nombres 133, 33, 5, 1, 3, dans lesquels la quantité se change par ces suppositions.

Dans la troisieme, j'écris vis-à-vis de ces nombres tous leurs diviseurs. Dans la quatrieme les valeurs 4, 1, 0, 1, 4, de $x\,x$ dans les suppositions faites pour $x$ à la premiere colonne.

Enfin dans la cinquieme colonne j'écris, pour la premiere bande, les nombres — 137, — 23, — 11, — 5, — 3, + 3, + 15, + 129 trouvés en retranchant 4 des nombres 133, 19, 7, 1 pris d'abord en — et ensuite en +. De même dans la seconde bande, les nombres — 34, — 12, — 4, — 2, 0, + 2, + 10, + 32, produits en retranchant 1 des nombres 33, 11, 3, 1 pris d'abord en —, puis en +, et ainsi des autres bandes. Tous ces nombres écrits, je commence par prendre dans la cinquieme bande de la cinquieme colonne, le premier nombre — 7 pour servir de premier terme d'une progression, et prenant en même-temps — 2 dans la quatrieme bande pour servir de second, je vois que le troisieme devroit être + 3, et qu'il ne se trouve pas dans la troisieme bande; ainsi je passe à 0 qui, en prenant toujours — 7 pour premier terme, donneroit + 7 pour troisieme terme, et comme + 7 n'est pas non plus dans la troisieme, je conclus qu'il

n'y a point dans les nombres de la cinquieme colonne, de progression qui puisse commencer par — 7.

Je prends donc — 5 pour premier terme, et je vois qu'en lui donnant — 2 pour second, le troisieme seroit + 1 qui se trouve bien dans la troisieme bande, mais qui donne pour quatrieme terme + 4, qui n'est pas dans la seconde bande; ainsi je laisse — 2, et je prends 0 pour second terme, ce qui me donne alors + 5, + 10, + 15, pour troisieme, quatrieme et cinquieme termes, et comme tous ces nombres se trouvent dans la troisieme, la seconde et la premiere bandes, j'écris dans la sixieme colonne les nombres 15, 10, 5, 0, — 5.

Prenant ensuite — 3 pour premier terme, je vois que ni — 2, ni 0 ne peuvent lui servir de seconds termes, parce que le premier donneroit la progression — 3, — 2, — 1, 0, + 1 dont le dernier terme n'est point dans la premiere bande; et que le second donneroit la progression — 3, 0, + 3, etc. qui manque dès le troisieme terme + 3 qui ne se trouve point dans la troisieme bande.

Il ne me reste plus qu'à prendre — 1 pour premier terme, je lui donne d'abord — 2 pour second qui ne réussit pas, mais lui donnant ensuite 0, j'ai pour troisieme, quatrieme, cinquieme termes, les nombres + 1, + 2, + 3 qui sont dans la troisieme, seconde et premiere bandes; j'écris donc dans la sixieme

Case 2.

120
60
30
15
5
120 . 6( 1

Case 3.

- 120
5 3 | — 11
. 15 . 2( 2 | — 12
1 | — 13

Case 4.

$x^2 + 1$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | — 1 | |
| | - 1 | — 2 | |
| 30 | - 2 | — 3 | + 10 |
| 8 . 36 | - 3 | — 4 | + 9 |
| 40 | - 4 | — 5 | + 8 |

Case 5.

$5x + 21$

7, — 3,
14, — 6
- 29, — 91
58, — 30, + 12, + 40, + 138

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| — 2 | — 2 | 0 | 0 | 0. |
| — 1 | + 1 | — 7 | — 3 | — 1 |
| 0 | + 4 | - 14 | — 6 | — 2 |
| + 1 | | | — 9 | — 3 |
| 1 | | | - 12 | |

ode
ou-
ivi-
ore-
gré,
l'x
oir
à-

colonne les nombres + 3, + 2, + 1, 0, — 1.

Cela fait, je ne cherche point à donner de nouvelles valeurs à $x$ pour exclure une de ces deux progressions, parce que la quantité donnée étant du quatrieme degré, doit ou n'avoir aucun diviseur du second degré, ou en avoir deux à-la-fois, ce qui se tire de ce qu'aussi-tôt qu'on aura trouvé un diviseur du second degré à une quantité du quatrieme, le quotient qui est toujours un diviseur en même-temps, sera aussi du second degré. —

Suivant cette réflexion, je prends indifféremment l'une ou l'autre des deux progressions précédentes; la premiere, par exemple, dans laquelle 5 étant ce qui répond à la supposition de $x = 0$, et 10 ce qui répond à la supposition de $x = 1$; j'ai $c = 5$ et $b + c = 10$, c'est-à-dire, $b = 5$. D'où le diviseur que donne cette progression est $x\,x + 5\,x + 5$. Je divise donc la quantité proposée par $x\,x + 5\,x + 5$, et je vois que la division réussit et donne pour quotient $x\,x + x + 1$ qui est le diviseur qu'on trouveroit par l'autre progression.

## XXII.

Méthode pour trouver les diviseurs du premier degré, lorsque l'$x$ doit avoir un coëfficient.

Lorsqu'il sera question de trouver les diviseurs d'une équation telle que $6\,y^4 - y^3 - 21\,y^2 + 3\,y + 20 = 0$, dont le premier terme aura un coëfficient qui n'aura pas dis-

paru, en divisant toute l'équation par ce coëfficient, on pourra se servir des principes précédens sans être obligé de changer cette équation en une autre qui n'ait point de coëfficient au premier terme, comme on le pourroit faire par la méthode de l'art. IX.

Pour le faire voir, examinons d'abord ce qui regarde les diviseurs du premier degré. Que $mx + a$ représente celui qui doit diviser une quantité quelconque donnée. Il est clair que si on fait $x$ successivement égal à 2, 1, 0, — 1, — 2, etc. ce diviseur deviendra, dans tous ces cas, $2m + a$, $m + a$, $a$, $-m + a$, $-2m + a$, etc. qui sont des quantités en progression arithmétique, dans lesquelles il est aisé de remarquer,

1°. Que la différence $m$ de tous les termes est le coëfficient de $x$ dans le diviseur;

2°. Que cette même différence $m$ est un diviseur du coëfficient du premier terme de la quantité proposée;

3°. Que le terme $a$ répondant à la supposition de $x = 0$, est la partie délivrée d'$x$ du diviseur;

4°. Que les mêmes quantités en progression arithmétique seront des diviseurs de la quantité donnée, dans laquelle on aura fait successivement $x$ égal à 2, 1, 0, — 1, — 2, etc.

Cela posé, lorsqu'il faudra chercher les diviseurs du premier degré d'une quantité quelconque donnée, on suivra d'abord le même

procédé que ci-dessus pour les trois premieres colonnes; on cherchera ensuite, parmi tous ces nombres, quelque progression dont la différence soit un diviseur du coëfficient du premier terme de la quantité proposée. Enfin, pour employer cette progression, on substituera dans $mx + a$, à la place de $a$ le terme de la progression qui répondra à la supposition de $x = 0$, et à la place de $m$ le nombre que l'on aura en retranchant un terme quelconque de la progression, de celui qui est au-dessus.

## XXIII.

Application de cette méthode à un exemple.

Supposons, par exemple, que l'on cherche les diviseurs de la quantité

$$6x^4 - x^3 - 21x^2 + 3x + 20.$$

Je range à l'ordinaire dans la premiere colonne les suppositions 2, 1, 0, — 1, — 2, à faire pour $x$. Dans la seconde, les nombres 30, 7, 20, 3, 34, que devient successivement la quantité donnée par ces suppositions, et enfin dans la troisieme tous les diviseurs de ces nombres.

Cela fait, afin de découvrir parmi tous les nombres de la troisieme colonne, quelque progression qui serve à reconnoître le diviseur cherché, je commence par examiner le premier nombre 1 de la premiere bande, et je vois d'abord que si on lui donne pour second le premier nombre 1 de la seconde bande, la progression 1, 1, 1, etc. qui en vient ne peut

pas être admise, puisqu'elle ne sauroit représenter le diviseur cherché $m\,x + a$ qui doit varier nécessairement par les différentes valeurs de $x$. Je vois de même que 7 ne sauroit être pris pour le second; car le troisieme terme que produiroit cette supposition seroit 13 qui ne se trouve pas dans la troisieme bande.

Prenant ensuite 1 en —, je vois que 1 de la seconde ne lui sauroit servir de second terme, parce que le troisieme seroit 3, qui n'est pas dans la troisieme bande. A l'égard de 7, il est inutile de chercher si le troisieme terme qu'il donneroit se trouve dans la troisieme bande, puisque la différence de — 1 à 7 est 8, qui n'est pas un diviseur du coëfficient du premier terme de la quantité proposée. Donc 1, soit qu'on le prenne en +, ou qu'on le prenne en —, est à rejetter.

Parcourant de la même maniere tous les autres nombres de la premiere bande, je ne trouve que 10 qui puisse avoir les conditions convenables. Lui donnant 7 pour second terme, il donne la progression 10, 7, 4, 1, — 2 dont la différence est 3, diviseur du coëfficient de $6\,x^3$.

Ayant donc écrit cette progression dans la quatrieme colonne, je prends le terme + 4 qui répond à la supposition de $x = 0$ pour exprimer la partie $a$ du diviseur cherché, et retranchant le même terme + 4 du terme supérieur + 7 qui représente $m + a$, j'ai + 3

pour exprimer $m$, c'est-à-dire, que le diviseur cherché, s'il doit y en avoir un, ne peut être que $3x + 4$. Je tente donc la division par cette quantité, elle réussit, et me donne pour quotient $2x^3 - 3x^2 - 3x + 5$.

## XXIV.

Méthode pour trouver les diviseurs du 2e degré, lorsque l'x doit avoir un coëfficient.

Examinons présentement les cas où les diviseurs doivent être du deuxieme degré. Soit pris $mx^2 + bx + c$ pour représenter le diviseur cherché d'une quantité donnée; il est clair, comme ci-dessus, que le dernier terme $c$ sera un diviseur du dernier terme de la quantité donnée, et que $m$ sera un diviseur du coëfficient de la plus haute puissance de $x$ dans la quantité donnée.

Choisissant donc d'abord pour représenter $m$ un des diviseurs du coëfficient du premier terme de la quantité donnée, et faisant la même opération que dans l'article XIX, à cela près, qu'au lieu de retrancher les quarrés 16, 9, 4, etc. on retranche le produit de ces mêmes quarrés par le nombre qu'on aura choisi pour $m$, on trouvera de même $b$ et $c$.

Si le diviseur que l'on a ainsi, en mettant dans $mx^2 + bx + c$, pour $m$ le nombre choisi, et pour $b$, $c$, ceux qui auront été déterminés d'après ce choix, ne réussit pas, on prendra un autre des diviseurs du coëfficient du premier terme de la quantité donnée pour représenter $m$, et l'on achevera le calcul de la

même maniere. Si après avoir essayé tous les diviseurs du coëfficient du premier terme, il arrivoit qu'on ne trouvât pas de diviseur par cette méthode, on seroit sûr que la quantité proposée n'en devoit point avoir.

XXV.

Application de cette méthode à un exemple.

Soit pris, pour faire une application de cette méthode, la quantité $4x^5 + 16x^4 - 22x^3 - 14x^2 - 56x + 77$ dont on demande un diviseur du second degré. Ayant d'abord placé à l'ordinaire ( table suivante, case 3 ) dans la premiere colonne les nombres 2, 1, 0, — 1, — 2, etc. auxquels on égale successivement $x$; dans la seconde, les nombres 117, 5, 77, 153, 437 que devient successivement la quantité proposée par ces valeurs de $x$; dans la troisieme, tous les diviseurs des nombres de la seconde : je commence par chercher, suivant les regles de l'art. XIX, s'il y a quelque diviseur du second degré, dont le premier terme ait l'unité pour coëfficient; mais n'en trouvant point, je suppose que $m$, c'est-à-dire, le coëfficient du premier terme du diviseur, soit 2 qui est un des diviseurs du coëfficient 4 du premier terme de la quantité donnée.

Je place alors dans la quatrieme colonne, au lieu des quarrés des nombres de la premiere, le produit de ces mêmes quarrés par 2, valeur supposée de $m$, c'est-à-dire, que j'écris dans la quatrieme colonne les nombres 8, 2,

0, 2, 8. Je retranche ensuite ces nombres de tous ceux de la troisieme colonne pris en — et en +, ce qui me donne pour la premiere bande de la cinquieme colonne — 125, — 47, — 21, — 17, — 11, — 9, — 7, — 5, + 1, + 5, + 31, + 109; pour la seconde bande — 7, — 3, etc.

Tous ces nombres écrits, je cherche toujours, comme ci-devant, des progressions arithmétiques parmi tous ces termes, et je ne trouve que la progression + 5, — 3, — 11, — 19, — 27 que j'écris dans la sixieme colonne: cela fait, je prends — 11 répondant à zéro pour exprimer le nombre $c$, et retranchant ce nombre de — 3 qui est au-dessus, j'ai le reste + 8 pour exprimer $b$. Le diviseur qui résulte donc de la supposition de $m = 2$ est $2x^2 + 8x - 11$; j'essaye alors la division qui réussit en donnant pour quotient $2x^3 - 7$, et sans prendre la peine de faire le calcul que demanderoit la supposition de $m = 4$, je vois qu'il ne doit pas réussir, parce qu'il faudroit pour cela que le quotient $2x^3 - 7$ pût se décomposer, ce qui est impossible. Ainsi la quantité proposée n'a pas d'autre diviseur du second degré, que $2x^2 + 8x - 11$.

## XXVI.

Lorsqu'on cherchera les diviseurs d'une quantité qui ne passera pas le cinquieme degré, on pourra toujours les trouver par les méthodes

Toute quantité donnée qui ne monte pas au sixième degré, et

qui a des diviseurs, en doit avoir d'un degré moins élevé que le troisieme.

précédentes, car aussi-tôt qu'on se sera assuré par ces méthodes que cette quantité n'aura point de diviseur, ni du premier, ni du second degré, on sera sûr aussi qu'elle n'en aura pas du troisieme.

XXVII.

Si la quantité monte au sixieme degré ou au-delà, elle pourroit n'avoir de diviseurs que de trois, ou de plus de 3 dimensions.

Mais si la quantité proposé s'élève au sixieme degré ou au-delà, elle pourroit n'être décomposable qu'en des quantités d'un degré plus élevé que le second. La méthode qu'il faudroit suivre pour trouver ces diviseurs, est fondée à-peu-près sur les mêmes principes que les précédens; je ne m'arrête point à l'expliquer à cause de la longueur des calculs.

XXVIII.

Tout ce que nous venons de dire sur les diviseurs commensurables, ne regarde que les équations numériques; cependant les équations littérales pouvant aussi avoir des diviseurs commensurables, il faut voir ce que l'on doit faire pour les trouver.

Supposons d'abord que l'équation ne renferme qu'une lettre connue avec l'$x$, et que cette équation soit ce que l'on appelle homogène; c'est-à-dire, que tous ses termes renferment, indépendamment des coëfficiens numériques, le même nombre de facteurs; telle seroit l'équation $x^3 - ax^2 - 10a^2x + 6a^3$, par exemple. On n'aura qu'à substituer l'unité à la place de la lettre connue $a$ de cette équa-

$x + 5$

$-23, -11, -5, -3, +3,$
$-12, -4, -2, 0, +2, +10$
$-1, +1, +5$

$5, -3, -1$

Case 1.

3
2
1
0
1

20

| 10
| 7
| 4
| 1
| $-2$

Case 2

$-56x + 77$

$125, -47, -21, -17, -5, +31, +109$ | $+5$
$7, -3, -1, +3$ | $-3$
$77, -11, -7, -1, +1,$ | $-11$
$155, -53, -19, -11, -15, +49, +151$ | $-19$
$445, -31, -27, -9, -$ | $-27$

Case 3

qui
vise
doi
d'u
moi
que
sem

Si l
tité
au si
degré
delà ,
pourr
voir
viseu
de tro
de plu
dimen

tion, et chercher ses diviseurs de la même maniere que ci-dessus. Ces diviseurs étant trouvés, s'ils sont du premier degré, on remettra la lettre $a$ à côté du nombre qui sert de second terme. Si le diviseur est du second degré, on placera $a$ après le coëfficient du second terme, et $a\,a$ après le nombre qui sert de troisieme terme.

Soit, par exemple, la quantité $x^3 + 4\,a\,x^2 - 17\,a^2\,x - 12\,a^3$; après avoir fait $a = 1$, et trouvé que la quantité $x^3 + 4\,x^2 - 17\,x - 12$, qui vient par cette opération, a pour diviseur $x - 3$, je conclus que $x - 3\,a$ est un diviseur de la quantité proposée.

Qu'on ait ensuite $2\,x^5 + 5\,a\,x^4 - 3\,a^2\,x^3 - 8\,a^3\,x^2 - 20\,a^4\,x + 12\,a^5$. En supposant $a = 1$, on aura $2\,x^5 + 5\,x^4 - 3\,x^3 - 8\,x^2 - 20\,x + 12$ qui donne pour diviseur du second degré $2\,x^2 + 5\,x - 3$. Mettant alors dans ce diviseur $a$ à côté de 5, et $a\,a$ à côté de 3, il vient $2\,x^2 + 5\,a\,x - 3\,a\,a$ pour le diviseur du second degré de $2\,x^5 + 5\,a\,x^4 - 3\,a^2\,x^3 - 8\,a^3\,x^2 - 20\,a^4\,x + 12\,a^5$.

## XXIX.

Dans une équation homogène et qui est affectée de trois lettres, on pourroit, en suivant les méthodes précédentes, parvenir encore à trouver ses diviseurs, tant du premier degré que du second; mais à l'aide de quelques observations de calcul qui se présentent assez naturellement, on peut réussir d'une façon un peu plus commode.

Méthode pour trouver tous les diviseurs à deux lettres dans une quantité qui en a trois

Supposons d'abord que la quantité donnée qui renferme trois lettres, $a$, $b$, $x$, dût avoir pour diviseur une quantité qui n'en renfermât que deux, que les lettres $x$, et $a$, par exemple. Puisque ce diviseur, quel qu'il soit, pourra, sans contenir de $b$, diviser la quantité donnée où $b$ entre, il faut que la valeur de $b$ soit indifférente à la division, et que cette division puisse se faire de même lorsque $b$ sera zéro. Donc si on fait $b = 0$ dans la quantité donnée, il faudra que la quantité donnée, par cette supposition ait pour commun diviseur avec la quantité entiere, le diviseur cherché. La question est donc en ce cas renfermée dans une autre, traitée dans la premiere partie, article LXXIII, où l'on a enseigné à trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités données: de sorte que par ce qu'on a enseigné dans cet article, on trouvera le diviseur cherché de quelque degré qu'il soit, pourvu qu'il n'ait que deux lettres.

XXX.

Exemple.

Pour montrer l'application de cette méthode, soit pris d'abord la quantité $x^4 + a x^3 + 2a^2 x^2 + 3a^3 x + a b b x + a^4 + a a b b$, dont on cherche un diviseur où les seules lettres $a$, $x$ entrent.

En faisant $b = 0$ il vient $x^4 + a x^3 + 2a^2 x^2 + 3a^3 x + a^4$ dont le plus grand commun diviseur avec la quantité entiere, ou, ce qui re-

vient au même, avec le reste $abbx + aabb$, est $x + a$, qui est donc nécessairement un diviseur de la quantité donnée, et le plus grand qu'elle puisse avoir qui ne contienne pas de $b$.

XXXI.

Soit $x^5 - 4ax^4 + 6aax^3 - a^3bx^3 + abbx^2 + 2aabx^2 - 4a^3x^2 - 2aabbx - 2a^3bx + 2a^3bb$; en faisant $b = 0$ dans cette quantité, on a $x^5 - 4ax^4 + 6aax^3 - 4a^3x^2$ dont il faut chercher le plus grand commun diviseur avec la quantité proposée, ou, ce qui revient au même, avec le reste, $-abx^3 + abbx^2 + 2aabx^2 - 2aabbx - 2a^3bx + 2a^3bb$, c'est-à-dire, le plus grand commun diviseur des quantités $x^3 - 4ax^2 + 6aax - 4a^3$ et $-x^3 + bx^2 + 2ax^2 - 2abx - 2aax + 2aab$. Autre exemple.

Or, s'il y a un diviseur commun entre ces deux quantités qui ne contienne pas de $b$, il sera aussi commun aux deux parties $-x^3 + 2ax^2 - 2a^2x$, et $bx^2 - 2abx + 2a^2b$ de la derniere de ces deux quantités; mais le diviseur commun de ces deux parties ne peut être que $xx - 2ax + 2a^2$, j'examine donc s'il divise aussi $x^3 - 4ax^2 + 6aax - 4a^3$, et comme il le divise en effet, je conclus qu'il est le diviseur cherché de la quantité proposée.

XXXII.

Supposons présentement que la quantité Méthode

pourtrouver les diviseurs de trois lettres et du premier degré.

proposée, composée de trois lettres dont on cherche les diviseurs, n'en ait aucun composé seulement de deux lettres, ou bien que si elle en renferme, on ait commencé par les trouver, et les mettre à part. Pour trouver alors les diviseurs de trois lettres et du premier degré qu'elle peut avoir, je commence par représenter ce diviseur par $m\,x + n\,a + p\,b$; $m, n, p$ étant supposés désigner des nombres. Je remarque ensuite que si on fait successivement, $a$, $x$, $b$ égaux à zéro dans ce diviseur, on a les trois quantités $m\,x + p\,b$, $n\,a + p\,b$, $m\,x + n\,a$, telles que les deux termes que chacune d'elles renferme, se trouvent répétés dans les deux autres quantités. $m\,x + p\,b$, par exemple, donné par la supposition de $a = 0$, est composé de $m\,x$ qui se trouve dans $m\,x + n\,a$ donné par la supposition de $b = 0$, et de $p\,b$ qui se trouve dans $n\,a + p\,b$ donné par la supposition de $x = 0$. Je vois en même-temps que la somme de ces trois quantités $m\,x + n\,a$, $m\,x + p\,b$, $n\,a + p\,b$, est le double du diviseur entier $m\,x + n\,a + p\,b$.

Or, comme ces trois quantités sont nécessairement des diviseurs de celles que l'on auroit en faisant les mêmes suppositions de $a$, $x$, $b$ égaux à zéro, dans la quantité proposée; on tire de-là, que pour trouver les diviseurs de cette quantité qui ne montent qu'au premier degré, et contiennent trois lettres, il faut commencer par écrire séparément les trois quantités,

tités, dans lesquelles la proposée se change par la supposition de $a, x, b$ égaux à zéro; écrire ensuite à côté de chacune de ces nouvelles quantités tous ses diviseurs du premier degré, et à deux lettres. Cela fait, il faut choisir trois diviseurs parmi ces trois classes de diviseurs à deux lettres, en observant les conditions dont nous venons de parler, que les deux termes dont chacun de ces diviseurs sera composé, se trouvent dans les deux autres diviseurs. Ces trois diviseurs étant ainsi trouvés, la moitié de leur somme sera le diviseur de la quantité proposée, si elle en a un.

Si pour trouver dans un de ces trois diviseurs de deux lettres, les deux termes qui doivent être la répétition de ceux qui sont dans les deux autres, il falloit en changer les deux signes à-la-fois; on voit bien que ce changement seroit permis, puisqu'en général, une quantité qui en divise une autre, la divisera encore, si on en change tous les signes.

## XXXIII.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Pour montrer l'application de cette méthode, soit proposée la quantité $2x^3 + 7ax^2 - 3bx^2 + 5a^2x - 3abx + 4b^2x + 10abb - 6b^3$. Ayant d'abord écrit (voyez la table ci-jointe, case 1) dans une colonne verticale les trois quantités $10ab^2 - 6b^3$, $2x^3 - 3bx^2 + 4bbx - 6b^3$; $2x^3 + 7ax^2 + 5a^2x$, dans lesquelles cette quantité se change par la

supposition de $x$, $a$, $b$ égaux à zéro, je place dans une seconde colonne verticale vis-à-vis de chacune de ces trois quantités, leurs diviseurs à deux lettres et du premier degré. La première fournit $5a - 3b$ et $10a - 6b$; la seconde seulement $2x - 3b$; et la troisieme $2x + 5a$. Cela fait, je vois tout de suite que si des deux diviseurs $5a - 3b$, $10a - 6b$, on prend le premier $5a - 3b$; il aura avec les deux diviseurs $2x - 3b$, $2x + 5a$, la propriété requise. Car ce premier diviseur $5a - 3b$ contient $5a$ qui est répété dans le diviseur $2x + 5a$ et $-3b$ qui est répété dans $2x - 3b$; de même $2x - 3b$ contient $2x$ qui est répété dans $2x + 5a$, et $-3b$ qui est répété dans $5a - 3b$; enfin, $2x + 5a$ est composé de $2x$ et de $+5a$, qui sont répétés dans les deux autres diviseurs $5a - 3b$, $2x - 3b$.

J'ajoute donc, suivant la règle précédente, ces trois diviseurs, et j'ai $4x - 6b + 10a$, dont la moitié $2x - 3b + 5a$ est le diviseur cherché. En effet, si on tente la division, on trouve pour quotient $x^2 + ax + 2bb$.

XXXIV.

Autre exemple.

Soit proposé maintenant de trouver les diviseurs du premier degré et à trois lettres de la quantité $8x^4 - 2ax^3 - 10bx^3 - 3a^2x^2 - 5abx^2 - 12ab^2x + 9a^2b^2 + 15ab^3$. Ayant fait successivement $x$, $a$, $b$ égaux à zéro dans cette quantité, j'ai les trois quantités

$9a^2b^2 + 15ab^3$, $8x^4 - 10bx^3$, $8x^4 - 2ax^3 - 3a^2x^2$ que j'écris (voyez la case seconde de la table ci-jointe) l'une sous l'autre dans une colonne verticale. J'écris dans une autre colonne verticale à côté de chacune de ces quantités leurs diviseurs du premier degré, et à deux lettres; ceux de la première sont $3a + 5b$ et $9a + 15b$; ceux de la seconde $4x - 5b$, $8x - 10b$; et ceux de la troisième $4x - 3a$ et $2x + a$.

Il n'est pas difficile ensuite de trouver que les trois diviseurs $3a + 5b$, $4x - 5b$, et $4x - 3a$ ont les propriétés requises, pourvû qu'on prenne le premier $3a+5b$ en changeant ses signes, c'est-à-dire, en l'écrivant ainsi $-3a-5b$; je mets donc à part ces trois diviseurs dans la quatrième colonne; je les ajoute, et je prends la moitié de la somme, ce qui me donne $4x - 3a - 5b$ pour le seul diviseur cherché, supposé qu'il y en ait un. Je tente la division, et je trouve pour quotient exact $2x^3 + ax^2 - 3ab^2$.

## XXXV.

Dans ces deux exemples nous n'avons point écrit les diviseurs d'une lettre que donnoient chacune des trois quantités de la première colonne, parce que ces diviseurs n'auroient jamais pû être les quantités dans lesquelles le diviseur à trois lettres se change par la supposition de $x$, $a$, $b$ égaux à zéro, et que

nous avons supposé qu'on s'étoit assuré par la méthode de l'article XXIX, que la quantité proposée n'avoit pas de diviseurs à deux lettres. Mais si on avoit des quantités qui eussent de ces sortes de diviseurs, et qu'on ne voulut pas se servir de la méthode de l'art. XXIX. On pourroit les trouver en même-tems que ceux à trois lettres par la même méthode que nous venons d'expliquer, pourvû que ces diviseurs ne fussent non plus que du premier degré.

Troisieme exemple où l'on trouve les diviseurs à deux lettres en même tems que ceux à trois.

Soit par exemple la quantité $16x^3 + 16bxx - 48axx + 35aax - 16abx - 6a^3 + 3a^2b$. Ayant écrit dans une premiere colonne (voyez la case 3 de la table ci-jointe) les trois quantités $-6a^3 + 3a^2b$, $16x^3 + 16bxx$, $16x^3 - 48axx + 35a^2x - 6a^3$, dans lesquelles cette quantité se change par la supposition de $x$, $a$, $b$ égaux à zéro. J'écris dans la seconde colonne, et à la premiere bande, $a$, $3a$, $-2a + b$, $-6a + 3b$ diviseurs du premier degré et à une ou deux lettres de la quantité $-6a^3 + 3ab$. De même, dans la seconde bande, j'écris les diviseurs $x$, $2x$, $4x$, $8x$, $16x$; $x + b$, $2x + 2b$, $4x + 4b$, $8x + 8b$, $16x + 16b$, de la seconde quantité $16x^3 + 16bxx$: et dans la troisieme bande, $a - 4x$, $3a - 4x$, $x - 2a$ diviseurs de la troisieme quantité $16x^3 - 48axx + 35a^2x - 6a^3$.

Cela fait, à cause du grand nombre de ces diviseurs, il faut plus d'attention que dans les exemples précédens pour n'en laisser aucun

qui puisse avoir les conditions requises. Quant à l'ordre qu'on doit suivre il est à-peu-près le même que celui qu'on a suivi dans les diviseurs numériques. Il faut donc comparer le premier de la premiere bande avec tous ceux des autres bandes, et faire ensuite la même opération pour chacun des autres diviseurs de la premiere bande. Je vois d'abord que si $a$ fait partie d'un diviseur de la quantité, ce ne peut être qu'un diviseur qui ne contienne que $a$ et $x$ parce que, s'il y avoit un terme qui contînt $b$, ce diviseur ne se seroit pas réduit à $a$ par la supposition de $x=0$. Ainsi je n'ai à choisir, dans ce cas, que parmi les cinq premiers diviseurs $x$, $2x$, $4x$, $8x$, $16x$. Or, comme de tous ces diviseurs il n'y a que $4x$ qui soit répété dans la troisieme, (pourvû que ce diviseur $4x$ soit affecté du signe —), et qu'en même-tems de tous les diviseurs de la troisieme bande, il n'y a que le premier $a-4x$ qui renferme le même terme $a$ de la première bande; je conclus que si $a$ fait partie d'un diviseur, il faut que ce diviseur soit $a-4x$, je l'écris donc à part. Je passe alors à $3a$, et comme je le trouve répété dans le diviseur $3a-4x$ de la troisieme bande, et que l'autre terme $4x$ du même diviseur se trouve être un des diviseurs de la seconde bande, en changeant le signe de ce diviseur, je conclus que $3a-4x$ peut être encore un diviseur de la quantité proposée, et je le mets à part afin de l'essayer.

Quant à $-2a+b$ on voit d'abord qu'il ne peut pas seul être un diviseur de la quantité proposée, parce qu'il faudroit pour cela que parmi les diviseurs de $16x^3+16bxx$, on eut le terme $b$ que deviendroit $-2a+b$ par la supposition de $a=0$. Reste donc à savoir s'il ne feroit pas partie d'un diviseur où $x$ entreroit. Pour m'en assurer, je commence par remarquer que de tous les diviseurs de la seconde bande il n'y a que $x+b$ avec lequel on puisse le comparer, parce que c'est le seul diviseur qui ait le terme $+q$ de commun avec lui. Je vois aussi qu'il n'y a que $x-2a$ de la troisieme bande avec lequel je puisse comparer le même diviseur $-2a+b$, parce qu'il n'y a que lui qui contienne le terme $-2a$. Je remarque enfin que de même que les deux termes du diviseur.. $-2a+b$ sont répétés dans les deux autres diviseurs $x+b$, $x-2a$, le diviseur $x+b$ a aussi ses deux termes répétés dans les deux autres $-2a+b$, $x-2a$, et réciproquement que les deux termes du diviseur $x-2a$ sont répétés dans les deux autres $x+b$, $-2a+b$. De-là je conclus que les trois diviseurs $-2a+b$, $x+b$, $x-2a$ ont les conditions nécessaires pour former un diviseur. Je les ajoute donc, et je mets à part la moitié $x-2a+b$ de leur somme pour un diviseur à tenter. Mais avant d'en faire le calcul, j'examine ce que peut me donner le diviseur $-6a+3b$; je vois tout de suite qu'il n'y a aucun de ses deux ter-

mes qui soit répété parmi les diviseurs des autres bandes, et qu'ainsi il faut les rejetter.

Par cet examen, on trouve donc les trois diviseurs $a - 4x$, $3a - 4x$, $x - 2a + b$ à essayer; je tente la division par le dernier, elle réussit, et me donne pour quotient $3aa - 16ax + 16xx$, que je divise ensuite par $3a - 4x$. La division réussit encore, et me donne pour quotient le premier diviseur $a - 4x$. Ainsi la quantité proposée étoit le produit de ces trois diviseurs.

## XXXVI.

Méthode pour trouver les diviseurs du second degré et à trois lettres.

Si la quantité proposée n'a point de diviseur du premier degré, et qu'on veuille examiner si elle n'en a point du second, on y parviendra assez facilement à l'aide de quelques observations analogues à celles sur lesquelles la méthode précédente est fondée. Soit pris $mxx + nax + pbx + qa^2 + rab + sbb$ pour représenter le diviseur cherché du second degré; faisant successivement $x = 0$, $a = 0$, $b = 0$, dans ce diviseur, j'ai les trois quantités

$$qa^2 + rab + sbb$$
$$mx^2 + pbx + sbb$$
$$mx^2 + nax + qa^2$$

qui sont toutes trois des diviseurs de celle que devient la proposée, lorsqu'on y fait successivement les mêmes suppositions de $x$, $a$, $b$ égaux à zéro. De plus, chacun de ces diviseurs est toujours tel, que les termes af-

fectés de lettres quarrées sont toujours répétés dans les deux autres diviseurs, tandis que les termes qui contiennent un produit de deux lettres, sont toujours les seuls de leur espèce. Voilà donc des conditions pour examiner les trois classes de diviseurs de deux lettres et du second degré qu'on tirera d'une quantité proposée; ainsi quand on en aura trouvé trois qui rempliront ces conditions, on n'aura qu'à les ajouter, prendre ensuite la moitié de tous les termes affectés de quarrés, et laisser en entier ceux qui n'en contiendront pas.

## XXXVII.

Application de cette méthode à un exemple.

Pour montrer l'application de cette méthode soit la quantité $x^5 - 4ax^4 - 5a^2x^3 + 4b^2x^3 - a^3x^2 - 14ab^2x^2 + 3b^4x - a^4x - 3a^3b^2$, laquelle n'a aucun diviseur du premier degré, et dont on cherche quelque diviseur du second.

On reprendra d'abord (voyez la premiere case de la table ci-jointe) les trois quantités $-3a^3b^2$, $x^5 + 4b^2x^3 + 3b^4x$; $x^5 - 4ax^4 - 5a^2x^3 - a^3x^2 - a^4x$ qu'on n'aura pas manqué de tirer de cette quantité, en faisant successivement $x$, $a$, $b$ égaux à zéro, lorsqu'on aura voulu s'assurer qu'elle n'avoit point de diviseurs du premier degré. On mettra ensuite à côté de ces quantités leurs diviseurs du second degré; la premiere fournissant $a^2$, $ab$,

Case 1.

Case 2.

$b^2$

Case 3.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x+16b$ | $a$ | $3a$ | $-2a+b$ |
| | $-4x$ | $-4x$ | $x+b$ |
| | $a-4x$ | $3a-4x$ | $x-2a$ |
| | $a-4x$ | $3a-4x$ | $x-2a+b$ |

Appl
tion de c
méthod
un exem

$b^2$, $3a^2$, $3ab$, $3bb$; la seconde $x^2+3b^2$, $x^2+b^2$; la troisieme seulement $x^2+ax$. Dans cette méthode on ne sauroit rejetter les diviseurs qui n'ont qu'un terme, quand même on se seroit assuré que la quantité proposée n'a aucun diviseur à deux lettres, parce qu'un diviseur à trois termes et du second degré, peut se réduire à un seul terme par la supposition de l'une des lettres égale à zéro.

Il s'agit présentement d'examiner tous les diviseurs de la premiere bande; je vois d'abord que le premier $a^2$ est à rejetter, parce que ce quarré ne se trouve point répété dans les autres bandes. Je passe ensuite à $ab$, et de ce que ce diviseur ne contient aucun terme affecté de $aa$ et de $bb$, je conclus que le diviseur dont il pourroit faire partie, ne peut avoir, outre ce terme que des $xx$, des $ax$, et des $bx$; et comme cette raison exclut la comparaison qu'on pourroit faire de $ab$ avec les diviseurs $x^2+3b^2$, $x^2+b^2$, il s'ensuit que si $ab$ doit faire partie d'un diviseur de la proposée, ce diviseur ne peut être que $xx+ax+ba$; mais je vois en même tems que $xx+ax+ba$ ne sauroit être un diviseur de la proposée, puisqu'il deviendroit seulement $xx$ par la supposition de $a=0$, et que $xx$ n'est point un des diviseurs de la seconde bande. Donc le diviseur $ab$ est encore à rejetter.

Quant au diviseur $bb$, je le trouve répété

dans le diviseur $x^2 + b^2$ de la seconde bande, et trouvant que le même diviseur $x^2 + b^2$, a $x^2$ de commun avec le diviseur de la troisieme bande, je conclus que $x^2 + b^2 + ax$ a les conditions requises pour tenter la division. Mais avant de l'entreprendre je passe aux autres diviseurs de la premiere bande, et je vois d'abord que $3aa$, et $3ab$ sont à rejetter par la même raison que $a^2$ et $ab$; je vois ensuite que $3bb$ étant répété dans le diviseur $x^2 + 3b^2$ et $x^2$ dans $xx + ax$, il s'ensuit que $xx + 3bb + ax$ a aussi les conditions requises pour tenter la division; j'essaye alors ces deux divisions, et je trouve que la seconde seule réussit. Le quotient qu'elle donne est $x^3 - 5ax^2 + b^2x - a^3$.

Au lieu de parcourir tous les diviseurs de la premiere bande, on auroit pû examiner le seul que la derniere bande contient, et trouver bien plutôt que $x^2 + ax + b^2$ et $x^2 + ax + 3b^2$ étoient les seuls diviseurs à tenter. Car, remarquant alors que le diviseur $x^2 + ax$ contient $x^2$ qui est répété dans $x^2 + 3b^2$ et $x^2 + b^2$, et que ces deux derniers contiennent l'un $3b^2$ et l'autre $b^2$ qui sont chacun dans les diviseurs de la premiere bande, il étoit facile d'en conclure que $x^2 + ax + b^2$ et $x^2 + ax + 3b^2$ ont les conditions requises et qu'ils sont les seuls; puisque, s'il y en avoit d'autres, ou bien ils auroient donné d'autres

quantités que $xx+ax$ par la supposition de $b=0$, ou bien d'autres quantités que $x^2+3b^2$ et $x^2+b^2$ par la supposition de $a=0$.

## XXXVIII.

Autre exemple.

Qu'on ait présentement à chercher les diviseurs de la quantité $2x^5+3ax^4+b^2x^3-a^2x^3+4ab^2x^2+6a^2b^2x+2ab^4-2a^3b^2$, soit du premier degré, soit du second, soit à deux lettres, soit à trois,

$2ab^4-2a^3b^2$, $2x^5+b^2x^3$, et $2x^5+3ax^4-a^2x^3$ étant les quantités que donne, dans la proposée, la supposition de $x$, $a$, $b$, égaux à zéro, il faut d'abord ranger vis-à-vis de chacune de ces quantités tous les diviseurs qu'elles peuvent avoir tant du premier degré que du second. Comme la premiere de ces trois quantités en a un assez grand nombre, on doit, dans la crainte d'en omettre quelqu'un, les chercher tous avec le même ordre que nous avons suivi pour les diviseurs numériques.

Application de la méthode donnée Art. XIV. pour trouver tous les diviseurs d'un nombre, aux quantités littérales.

Ayant écrit (voyez la seconde case de la table ci-jointe) cette premiere quantité $2ab^4-2a^3bb$ à part avec une barre à sa gauche, et à gauche de cette barre l'unité, comme premier diviseur de la quantité, je pose 2 au-dessous de 1, parce que c'est après 1 le diviseur le plus simple que puisse avoir cette quantité, et j'écris à droite de la même barre $ab^4-a^3b^2$. Je divise ensuite cette quantite par $a$, et j'écris

$a$ à gauche de la barre, en mettant en même-tems à droite le quotient $b^4 - a^2 b^2$ ; je multiplie alors $a$ par 2, ce qui me donne $2a$ que j'écris à gauche de $a$ comme un nouveau diviseur de la quantité; puis je divise $b^4 - a^2 b^2$, par $b$, et j'écris le diviseur $b$ à gauche, et le quotient $b^3 - a^2 b$ à droite. Enfin je multiplie $b$, par 2, par $a$, par $2a$; et je mets à gauche de $b$, les produits, $2b$, $ab$, $2ab$ comme de nouveaux diviseurs de la quantité.

La quantité étant réduite à $b^3 - a^2 b$, je la divise encore par $b$, que j'écris toujours à gauche, ainsi que le quotient $bb - aa$ à droite; je ne multiplie point ensuite $b$ par 2, ni par $a$, ni par $2a$, parce que cela donneroit des diviseurs que j'ai déjà eu; mais je le multiplie par $b$ et par $2b$, ce qui me donne les nouveaux diviseurs du second degré $bb$ et $2bb$; si j'en voulois admettre du troisieme, ainsi que cela peut être nécessaire dans d'autres occasions, je multiplierois, outre cela, $b$ par $ab$ et $2ab$.

Après avoir réduit la quantité à $bb - aa$, je vois qu'elle est divisible par $b - a$, et que le quotient est $b + a$; j'écris donc l'un à gauche et l'autre à droite, et je multiplie $b - a$ par 2, par $a$, par $b$, par $2a$, et par $2b$, ce qui me donne pour nouveaux diviseurs du premier et du second degré, $2b - 2a$, $ba - aa$, $bb - ab$, $2ab - 2aa$, $2bb - 2ab$. Si j'en avois voulu du troisieme et du quatrieme degré, j'aurois, outre cela, multiplié $b - a$ par

$ab$, $2ab$, $abb$, $2abb$. La quantité restante $b+a$ n'ayant plus d'autre diviseur qu'elle-même, je l'écris à gauche, et je la multiplie par 2, par $a$, par $b$, par $2b$, $2a$, $b-a$, $2b-2a$; ce qui me donne les nouveaux diviseurs du premier et du second degré, $2b+2a$, $ba+aa$, $2ba+2aa$, $bb+ab$, $2bb+2ab$, $bb-aa$, $2bb-2aa$. Si j'en avois voulu admettre des troisieme, quatrieme et cinquieme degrés, c'est-à-dire, tous les diviseurs que la quantité proposée pouvoit avoir, j'aurois multiplié, outre cela, $b+a$ par $ab$, $2ab$, $bb$, $2bb$, $abb$, $2abb$, $ba-aa$, $2ba-2aa$, $bb-ab$, $2bb-2ab$, $abb-aab$, $2abb-2a^2b$, $b^3-ab^2$, $2b^3-2ab^2$, $ab^3-a^2b^2$, $2ab^3-2a^2b^2$.

Cela fait, j'écris (Voyez la troisieme Case de la Table ci-jointe) tous les diviseurs du premier et du second degré $a$, $2a$, $b$, $2b$, $b-a$, $2b-2a$, $b+a$, $2b+2a$, $ab$, $2ab$, $b^2$, $2b^2$, $ab-aa$, $2ba-2aa$, $bb-ab$, $2bb-2ab$, $ba+aa$, $2ba+2aa$, $bb+ba$, $2bb+2ab$, $b^2-a^2$, $2b^2-2a^2$ à côté de la quantité $2ab^4-2a^3b^2$ qui les a donnés. J'écris ensuite à côté de la quantité $2x^5+b^2x^3$, les diviseurs du premier et du second degré $x$, $x^2$, $2x^2+bb$, et à côté de la quantité $2x^5+3ax^4-a^2x^3$, ses diviseurs du premier et du second degré $x$, $x^2$, $2xx+3ax-2a$.

Parcourant après tous ces diviseurs pour savoir ceux qui peuvent être admis, je remarque bientôt qu'il n'y en a aucun du premier degré.

Car ne trouvant que $x$ dans la seconde et la troisieme bande qui soit du premier degré, je conclus qu'il doit être le seul diviseur du premier degré, s'il y en peut avoir; puisque si le diviseur du premier degré renfermoit, ou un terme affecté de $a$, ou un affecté de $b$, celui qui auroit été affecté de $a$, seroit resté dans les diviseurs donnés par la supposition de $b=0$, et que celui qui auroit été affecté de $b$ seroit resté dans les diviseurs donnés par la supposition de $a=0$. Mais $x$ n'est point un diviseur de la quantité proposée; donc il n'y en a point du second degré. Je viens ensuite aux diviseurs du second degré, et je commence par $x^2$ que je prends dans la troisieme bande, je conclus que, s'il fait partie d'un diviseur, il ne peut lui manquer qu'un terme affecté du produit $ab$. En effet, s'il y en avoit eu qui fussent affectés de $aa$, de $bb$, de $ax$ ou de $bx$, ceux qui auroient été affectés de $bb$ ou de $bx$, n'auroient pas disparu par la supposition de $a=0$, et ceux qui auroient été affectés de $aa$ ou de $ax$, ne se seroient pas évanouis par la supposition de $b=0$. Mais je trouve dans la premiere bande $ab$ et $2ab$; donc $xx+ab$, $xx+2ab$, $xx-ab$, $xx-2ab$, sont des diviseurs à tenter.

Je passe ensuite au diviseur $2x^2+3ax-aa$, et je trouve le terme $2x^2$ répété dans le diviseur supérieur $2xx+bb$, je trouve en même tems le terme $-aa$ répété dans plusieurs diviseurs qui sont au-dessus: mais de tous les divi-

seurs où il est répété, il n'y a que $bb - aa$ qui ait en même tems le terme $bb$ que contient le diviseur $2xx + bb$. Ainsi ce n'est qu'avec $2xx + bb$ et $bb - aa$ que $2x^2 + 3ax - aa$ peut concourir à former un diviseur qui ait les conditions requises, et ce diviseur qui est $2x^2 + 3ax - aa + bb$, est, par conséquent, à tenter. Je vois qu'il n'y en a plus d'autre à chercher, parce que s'il pouvoit y en avoir un qui n'eût pas été découvert dans l'examen qu'on vient de faire des diviseurs de la troisieme bande, il faudroit que ce fut un seul terme affecté de $ab$ : or, on voit tout de suite que la quantité n'a point de diviseur de cette nature.

Je tente alors la division par $2xx + 3ax - aa + bb$, elle réussit, et me donne pour quotient $x^3 + 2abb$ qui m'apprend qu'aucune des quantités $xx + ab$, $xx - ab$, $xx + 2ab$, $xx - 2ab$, ne peut diviser la proposée.

## XXXIX.

Si la quantité proposée étoit d'un degré plus élevé que le cinquieme, et qu'après s'être assuré qu'elle n'a aucun diviseur, ni du premier, ni du second degré, on voulût chercher ceux du troisieme, quatrieme, etc. degré qu'elle pourroit avoir, on suivroit pour cela une méthode analogue à celles qu'on vient d'expliquer, et qu'il est assez facile d'imaginer.

Si la quantité dont on cherche les diviseurs renfermoit plus de trois lettres, la méthode

qu'il faudroit suivre pour les trouver, seroit, à très-peu de chose près, la même que lorsqu'il n'y en a que trois; ainsi nous laisserons les Commençans s'y exercer.

XL.

Ce qu'il faut faire pour trouver des diviseurs des quantités qui ne sont pas homogenes.

Lorsqu'on aura une quantité dont tous les termes ne sont pas homogenes, c'est-à-dire, élevés au même degré, on n'aura qu'à commencer par mettre tous ses termes au même degré, à l'aide d'une nouvelle lettre, et chercher les diviseurs de cette nouvelle quantité par les regles précédentes. Ces diviseurs trouvés, on en chassera la nouvelle lettre introduite, en la supposant égale à l'unité, et l'on aura par ce moyen les diviseurs cherchés. Que j'aie, par exemple, la quantité $x^6 + bx^5 - bx^4 + x^2 + bx - b$; je multiplie le terme $bx^4$ par $a$, afin de le rendre du sixieme degré. Par la même raison, je multiplie $x^2$ par $a^4$, $bx$ par $a^4$, et $b$ par $a^5$; ce qui me donne la quantité $x^6 + bx^5 - abx^4 + a^4xx + a^4bx - a^5b$, laquelle, au moyen des méthodes précédentes, se trouve être le produit de $xx - ab + bx$ par $x^4 + a^4$. Je suppose $a = 1$ dans ces deux produisans, ce qui me donne $xx - b + bx$, et $x^4 + 1$ pour les deux produisans de la quantité proposée $x^6 + bx^5 - bx^4 + x^2 + bx - b$.

XLI.

Il y a des cas où les diviseurs se trouvent plus facilement qu'en suivant les méthodes précédentes,

Case 1.

Cas où le diviseur se trouve plus facilement que par les méthodes précédentes.

$$\begin{array}{r} 3\,b^2 \\ x^2 + 3\,b^2 \\ x^2 + a\,x \\ \hline x^2 + 3b^2 + ax \end{array}$$

se 2

| | |
|---|---|
| 1 | $2ab4 - 2a^3b^2$ |
| 2 | $ab^4 - a^3bb$ |
| $2a, a$ | $b_4 - a^2b^2$ |
| $2ab, ab, 2b, b$ | $b^3 - a^3b$ |
| $2ab^3, abb, 2bb, bb, b$ | $b^2 - a^2$ |
| $2b - 2a, b - a$ | $b + a$ |
| $2b + 2a, b + a$ | 1 |
| $b^2 - 2a^2, b^2 - a^2$ | |

| | |
|---|---|
| $ab$ | $bb - aa$ |
| $x$ | $2xx + bb$ |
| $x$ | $2xx + 3ax - aa$ |
| $-2ab$ | $2xx + bb + 3ax - aa$ |
| $-2ab$ | |

Ce qu'il faut faire pour trouver des diviseurs des quantités qui ne sont pas homogenes.

précédentes, lorsqu'on a un peu d'habitude dans le calcul. Voici un de ces cas sur lequel il est bon de prévenir les commençans.

Cas où le diviseur se trouve plus facilement que par les méthodes précédentes.

Lorsque quelqu'une des lettres de la quantité proposée ne montera qu'au premier degré, il est aisé de voir qu'il ne peut y avoir qu'un des diviseurs de cette quantité qui contienne cette lettre. Donc il y aura au moins un diviseur qui ne la contiendra pas, et alors, suivant la méthode de l'art. XXIX, pour trouver ce diviseur, il faudra chercher le plus grand commun diviseur des termes où cette lettre se trouve, et des autres termes dans lesquels cette lettre ne se trouve pas.

Soit, par exemple, la quantité $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x + cx^3 - acxx - 8a^2cx + 6a^3c - 8a^4$; je cherche le plus grand commun diviseur des deux parties $cx^3 - acxx - 8aacx + 6a^3c$, et $x^4 - 3x^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x - 8a^4$ de cette quantité, l'une contenant la lettre $c$, l'autre n'en contenant point, je trouve pour ce plus grand diviseur commun $xx + 2ax - 2aa$; c'est en effet le diviseur cherché de la quantité proposée.

# ÉLÉMENS

# D'ALGEBRE.

## QUATRIEME PARTIE.

*Résolution des équations des degrés quelconques lorsqu'elles n'ont que deux termes, ou lorsqu'en ayant trois, elles peuvent se réduire à celles qui n'en ont que deux, par la méthode des opérations du deuxième degré; avec différentes opérations relatives aux équations, comme l'élévation des puissances, l'extraction des racines, la réduction des quantités radicales, etc.*

---

APRÈS avoir vu comment on tiroit d'une équation qui passoit le second degré, celles du premier et du second degré qu'elle pouvoit renfermer, il faut voir ce qu'on a fait pour résoudre les équations qui échappent à cette méthode.

I.

Des équations du troisieme degré à deux termes.

Pour aller du plus simple au plus composé, nous commencerons par les équations qui ne contiennent que deux termes : supposons d'abord qu'elles ne montent qu'au troisième degré, comme $ax^3 = b$.

Pour résoudre ces équations, il est bien aisé d'imaginer de délivrer d'abord $x^3$ de son coëfficient, et de prendre la racine cube des deux membres. Le caractère qu'on emploie pour exprimer la racine cube, est le même que celui dont on se sert dans la racine quarrée; mais l'on met 3 au-dessus pour le distinguer.

On met un 3 sur le caractere $\sqrt{}$ pour exprimer la racine cube.

Ainsi, pour exprimer la valeur de $x$ qu'on tire de l'équation $ax^3 = b$, ou $x^3 = \frac{b}{a}$, on écrit $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. Si par exemple, $b = 1000$, et $a = 2$, on a $x = \sqrt[3]{500}$.

II.

Il faut observer qu'on n'a pas ici, comme dans les racines quarrées, la liberté de mettre $+$ ou $-$ devant le signe radical; mais qu'au contraire, la racine cube d'une quantité est toujours de même signe que la quantité elle-même, à cause que le cube d'une quantité positive est positif, et que celui d'une quantité négative est négatif.

Les radicaux cubes ne peuvent avoir qu'un signe à la fois.

III.

Cette résolution fournit assez naturellement une réflexion qui paroît contredire celles qu'on a faites précédemment sur les nombres des racines des équations. Car, un cube n'ayant qu'une racine, et cette racine n'ayant qu'un signe, il ne paroît pas qu'une équation

telle que $a\,x^3 = b$ donne plus d'une valeur de $x$; cependant, suivant ce qu'on a vu ci-dessus, on devroit s'attendre à trouver trois racines dans une équation du troisième degré, de même que deux dans une du second.

Que conclure de cette réflexion? Abandonnera-t-on ce principe si satisfaisant par sa généralité, et qui suit naturellement de la formation des équations, exposée dans la IIIe. partie, article II? Voici le dénouement de cette difficulté, tiré de la formation même.

Qu'on mette l'équation $ax^3 = b$ sous cette forme $x^3 - \frac{b}{a} = 0$, qu'on mette aussi sa racine $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ sous la forme $x - \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = 0$, qu'on divise alors $x^3 - \frac{b}{a}$ par $x - \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, on trouvera une équation du second degré qui contiendra les deux autres racines.

Pour en faire le calcul plus aisément, soit fait $\frac{b}{a} = c^3$, on aura donc, au lieu des équations précédentes, $x^3 - c^3 = 0$, et $x - c = 0$; divisant la première par la seconde, il vient au quotient $xx + cx + cc = 0$; dont les deux racines sont exprimées par $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{-\frac{3}{4}cc}$, et deviendront la seconde et la troisième valeur cherchée de $x$ dans l'équation $x^3 = \frac{b}{a}$, aussi-tôt qu'on aura remis à la place de $c$ sa valeur $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$.

IV.

La substitution faite, les deux de $x$ se trouveront exprimées par

$$a - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{b}{a}} \pm \sqrt{-\tfrac{3}{4}\sqrt[3]{\tfrac{bb}{aa}}}.$$

Car on voit que le quarré de $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, c'est-à-dire, le produit de $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ par $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ doit être $\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}$; et qu'en général la multiplication des racines cubes, comme celle des racines quarrées, se fait en multipliant d'abord les quantités qui sont sous le signe radical, et en mettant ensuite ce signe devant le produit.

Comment on multiplie les radicaux cubes.

V.

Les trois racines de l'équation proposée $ax^3 = b$, sont donc $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}}$; $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} - \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}}$; la premiere réelle, et les deux autres imaginaires, mais cependant toujours telles, qu'on peut dire qu'elles résolvent l'équation proposée.

Racines de l'équation du 3e. degré à deux termes.

VI.

Supposons maintenant qu'on ait une équation à deux termes d'un degré quelconque, on la résoudra de la même maniere, en em-

Des équations à deux term. et d'un degré quelconque.

ployant un radical dont l'exposant soit celui que l'inconnue a dans cette équation. Soit, par exemple, l'équation $ax^m = b$, ou $x^m = \frac{b}{a}$, on en tirera $x = \sqrt[m]{\frac{b}{a}}$.

Si $m$ est un nombre impair, cette quantité ne pourra être que négative, lorsque $\frac{b}{a}$ sera négatif, et elle ne pourra être que positive, lorsque $\frac{b}{a}$ sera positif. Si $m$ est un nombre pair, la racine aura, comme dans le second degré, le signe $\pm$, et elle ne sera réelle que lorsque $\frac{b}{a}$ sera positif. Dans le cas où $\frac{b}{a}$ sera négatif ($m$ toujours pair), les deux racines exprimées par $\pm \sqrt[m]{\frac{b}{a}}$ seront alors toutes les deux imaginaires. Ainsi toutes les équations exprimées généralement par $x^m = \frac{b}{a}$ ne pourront, au plus, avoir que deux racines réelles, les autres racines étant nécessairement imaginaires.

Ces équations ne sauroient jamais avoir plus de deux rac. réelles.

Qu'on ait, par exemple, $x^4 = 256$, les deux racines réelles sont $+4$ et $-4$, les deux imaginaires sont $+\sqrt{-16}$ et $-\sqrt{-16}$. Dans l'équation $x^5 = 243$, la seule racine réelle est $+3$, et les autres, celles qu'on doit trouver en résolvant l'équation $x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 27x + 81 = 0$ qui vient par la division de l'équation $x^5 - 243 = 0$ par l'équation $x - 3 = 0$. Sans résoudre cette équation, on doit être assuré

que ses racines sont toutes imaginaires, puisque, s'il y en avoit quelqu'une de réelle, elle résoudroit aussi $x^5 = 243$, et par conséquent il y auroit d'autre nombre réel que 3 qui, élevé à la cinquieme puissance, donneroit 243.

## VII.

Il ne manque présentement à ce que nous venons de dire sur les équations à deux termes, que d'abréger ou simplifier les expressions radicales qu'elles donnent, lorsqu'il y aura une partie de la quantité dont on pourra prendre exactement la racine, ou même d'éviter entiérement le signe radical, lorsque la quantité entiere sera une puissance complette.

Réflexions sur l'élevation des puissances.

Pour reconnoître ces cas, il faut commencer par faire quelques réflexions sur l'inverse de l'opération qu'on se propose alors, c'est-à-dire, sur celle par laquelle des quantités proposées s'élevent à des puissances quelconques.

Qu'on ait, par exemple, une quantité telle que $abcd$ à élever à la puissance $m$, on voit bien qu'il viendra par cette opération $a^m b^m c^m d^m$.

Qu'il s'agisse d'élever à une puissance quelconque, une quantité comme $\frac{abc}{de}$ qui a un diviseur, il est clair qu'il faudra élever ce diviseur, ainsi que le numérateur à cette puissance quelconque, et que s'il y avoit des coefficiens, il faudroit qu'ils fussent aussi élevés à la même puissance. De plus, si les facteurs ou produisans de la quantité donnée se trouvoient

déjà élevés à quelques puissances, ils deviendroient alors élevés à une nouvelle puissance, dont l'exposant seroit le produit de l'exposant qu'ils avoient d'abord par celui de la puissance à laquelle on les voudroit élever. Ainsi $\frac{2a^2b^3}{3c^4}$ élevé à la puissance 3, donnera $\frac{8a^6b^9}{27c^{12}}$; $\frac{a^mb^r}{c^n}$ à la puissance $q$, deviendra $\frac{a^{mq}b^{rq}}{c^{nq}}$. Tout cela est fort simple, et suit entiérement de ce principe, qu'une quantité élevée à une puissance quelconque, n'est autre chose que ce qui résulte de la multiplication de cette quantité par elle-même autant de fois moins une, que l'exposant de la puissance contient d'unités.

## VIII.

Application des réflexions précédentes à l'extraction des racines.

On voit bien présentement que l'inverse de cette opération, c'est-à-dire, l'extraction des racines ne demandera autre chose que de diviser les exposans des parties ou facteurs de cette quantité par l'exposant de la racine; soit que ces parties ou facteurs soient dans le numérateur, soit qu'ils soient aussi dans le dénominateur. Qu'il soit question, par exemple, de prendre la racine cube de $\frac{a^3b^6}{c^9}$, on divisera par 3 les exposans 3, 6, 9, et on prendra leurs quotiens 1, 2, 3, pour les nouveaux exposans des mêmes lettres. Par ce moyen $\frac{ab^2}{c^3}$ sera la racine cube cherchée.

Si la quantité avoit eu un coëfficient, on en auroit pris la racine cube; $\frac{8a^3b^6}{c^9}$, par exemple, auroit donné $\frac{2ab^2}{c^3}$ pour sa racine cube.

De la même maniere, si on cherche la racine quarrée quarrée, ou quatrieme de $\frac{16a^4b^8}{d^4c^{12}}$, on trouvera $\frac{2ab^2}{dc^3}$.

## IX.

De l'extraction des racines, lorsque les puissances sont incomplettes.

Lorsqu'il n'y aura qu'une partie de la quantité qui se pourra extraire, on l'extraira, et on laissera le reste sous le signe radical affecté de l'exposant qui lui convient. Soit proposé, par exemple, de prendre la racine cinquieme de $\frac{32a^{10}b^5}{486c^7}$ qui est composé du produit de $\frac{32a^{10}b^5}{243c^5}$ par $\frac{b^2}{c}$ dont la premiere est exactement la cinquieme puissance de $\frac{2a^2b}{3c}$, et dont la seconde n'a pas de cinquieme racine; il faudra écrire alors $\frac{2a^2b}{3c}\sqrt[5]{\frac{b^2}{2c^2}}$ pour la racine cherchée.

De même la racine cube de $\frac{8a^3b+16a^3c}{54d}$ sera $\frac{2}{3}a\sqrt[3]{\frac{b+2c}{2d}}$, parce que la quantité $\frac{8a^3b+16a^3c}{54d}$ est le produit de $\frac{8a^3}{27}$ par $\frac{b+2c}{2d}$, que la premiere de ces deux quantités est un cube parfait, celui de $\frac{2}{3}a$, et que la seconde n'a point de racine cube. De même $\sqrt[5]{\frac{32a^9+128a^6b^3-160a^3b^4}{3b^6}}\ldots\ldots$

$=\frac{2a}{b}\sqrt[5]{\frac{a^4+4ab^3-5b^4}{3b}}$.

X.

Lorsque la quantité, dont il faudra extraire la racine, sera composée, ainsi que les précédentes, de plusieurs termes, et qu'après avoir séparé de tous ses termes les quantités communes qui sont des puissances complettes, on soupçonnera que le reste pourroit être la puissance complete de quelque quantité commensurable composée de plusieurs termes, l'opération qu'il faudra faire pour s'en assurer, sera plus difficile. Afin de trouver la méthode qu'il faut suivre dans cette opération, nous commencerons par faire quelques réflexions sur le problême inverse, c'est-à-dire, sur l'élévation des quantités complexes à des exposans donnés, et nous en tirerons ensuite les principes qu'il faut suivre pour extraire les racines de ces sortes de quantités.

Cherchons d'abord comment la méthode d'élever au cube peut donner celle d'extraire la racine cube, on verra ensuite que les autres puissances n'augmentent la difficulté que par la longueur des calculs.

XI.

Soit prise la quantité complexe la plus simple $u+z$, et soit élevée cette quantité au cube. On aura premiérement, pour son quarré, $uu+2uz+zz$, qui, multiplié par la simple puissance, donne pour le cube demandé, $u^3+3uuz+3uzz+z^3$. On voit donc qu'une

quantité qnelconque composée de deux parties, lorsqu'on l'éleve au cube, donne 1°. le cube de la prémiere partie; 2°. le triple du quarré de cette premiere partie multiplié par la seconde partie; 3°. le triple de la premiere partie multiplié par le quarré de la seconde; 4°. le cube de la seconde.

En quoi consiste le cube d'un binome.

## XII.

Qu'on ait donc une quantité dont on veuille extraire la racine cube, on commencera par y chercher un terme qni soit un cube, et ce cube représentant $u^3$, l'on écrira à côté sa racine qui représentera $u$. On triplera ensuite le quarré de cette racine, et on le fera servir de diviseur à ce qui reste de la quantité donnée, lorsqu'elle aura été diminuée du cube de la racine premiérement posée. Le quotient de cette division sera la seconde partie de la racine, et représentera $z$; l'ayant écrit à côté du premier terme, on multipliera ensuite ce dernier terme par la quantité qui représente $3uu+3uz+zz$, c'est-à-dire, par le triple du quarré de la premiere partie, plus le triple du produit de la premiere quantité par la seconde, plus le quarré de la seconde. La multiplication faite, on retranchera le produit qu'elle donnera de la quantité proposée, dont le premier cube, qui représente $u^3$, a déjà été ôté. S'il ne reste rien, on sera sûr que la quantité étoit exactement le cube du binome répondant à $u+z$. S'il reste encore plusieurs

Méthode qu'il faut suivre pour prendre la racine cube des quantités complexes.

termes, et qu'on veuille savoir si elle ne seroit point le cube d'un trinome, pour trouver le troisieme terme, on fera des deux termes déjà écrits le même usage qu'on a fait du premier terme, lorsqu'on a cherché le second.

XIII.

Premier exemple.

Quelques exemples éclairciront cette méthode. Soit la quantité $8y^6+60y^4b^2+150b^4y^2+125b^6$; je commence par prendre la racine cube du premier terme $8y^6$, et j'écris cette racine (Voyez la table page 120, case 1.) $2y^2$ à côté de la quantité proposée, je récris ensuite le cube de $2y^2$ sous la quantité proposée, en observant d'en changer le signe, c'est-à-dire, en lui donnant le signe —. La soustraction ou réduction faite, j'écris le reste $60y^4b^2+150b^4y^2+125b^6$, et je mets au-dessous de $2y^2$ le triple de son quarré, c'est-à-dire, $12y^4$. Je divise alors le premier terme $60y^4b^2$, par ce triple $12y^4$, et j'écris le quotient $5b^2$, qui vient de cette division, à côté de $2y^2$. J'ajoute ensuite à $12y^4$ le produit $30b^2y^2$ du triple de $2y^2$ par la quantité $5b^2$, que je viens d'écrire, et j'ajoute à ces deux premiers termes $2b^4$, quarré de $5b^2$.

Cela fait, je multiplie $5b^2$ par ces trois termes, et j'écris leurs produits avec des signes différens, sous la quantité $60y^4b^2+150b^4y^2+125b^6$ : voyant qu'après la réduction il ne reste rien, je conclus que la quantité proposée étoit un cube parfait, et que sa racine étoit $2y^2+5b^2$.

XIV.

Que j'aie à présent la quantité $x^6+6bx^5+21b^2x^4+44b^3x^3+63b^4x^2+54b^5x+27b^6$ qu'on voit bien au premier coup-d'œil devoir donner plus de deux termes pour sa racine cube. Opérant d'abord comme dans l'exemple précédent, je trouve avec facilité (Voyez la table page 120, case 2.) les deux premiers termes $x^2+2bx$. Mais comme, au lieu de ne rien rester, ainsi qu'il est arrivé dans cet exemple, il vient pour reste $9b^2x^4+36b^3x^3+63b^4x^2+54b^5x+27b^6$, je divise le premier terme $9b^2x^4$ de ce qui reste, par $3x^4$ triple du quarré de $x$, parce que ce terme $3x^4$ est le premier de ceux que l'on a en triplant le quarré de la quantité $xx+2bx$, laquelle représente actuellement la premiere partie (nommée $u$, art. XI.) de la racine cube cherchée. Ayant fait cette division de $9b^2x^4$ par $3x^4$, j'écris le quotient $3b^2$ à côté de $xx+2bx$. Je forme ensuite la quantité $3x^4+12bx^3+21b^2x^2+18b^3x+9b^4$, en ajoutant le triple du quarré de $xx+2bx$, avec le triple du produit de $xx+2bx$ par $3b^2$, et le quarré de $3b^2$. Cela fait, je multiplie cette quantité par $3b^2$, et j'écris tous les termes du produit, en changeant leurs signes, sous la quantité $9b^2x^4+36b^3x^3+63b^4x^2+54b^5x+27b^6$, et comme il ne reste rien après la réduction, je conclus que $x^2+2bx+3b^2$ est exactement la racine cube de la quantité proposée.

Second exemple.

## XV.

Nous avons vu (II^eme partie, art. XXIV, XXV et XXVI) comme on faisoit sur les quantités radicales du second degré, les opérations d'addition, soustraction, multiplication et division. Ces opérations étant également nécessaires pour les quantités radicales des degrés plus élevés, nous allons examiner ce que demandent ces nouveaux radicaux.

Additions et soustractions des quantités radicales de toute espece.

Quant à l'addition et à la soustraction, elles ne demandent rien de plus que ce qu'on a dit pour les mêmes opérations, en parlant des radicaux du second degré. Il suffit toujours de réduire chaque radical à sa plus simple expression, et de les ajouter ou de les retrancher comme les quantités commensurables.

Qu'on ait, par exemple, $\sqrt[3]{b^4+2ab^3}$ à ôter de $\sqrt[3]{8a^3b+16a^4}$, on change la premiere quantité en $b\sqrt[3]{b+2a}$, et la seconde en $2a\sqrt[3]{b+2a}$: or, la soustraction est alors toute simple, et donne $\overline{2a-b}\sqrt[3]{b+2a}$.

De même, si on ajoute $3a\sqrt[4]{16b^8+32b^4a^4}$ avec $4b\sqrt[4]{a^4b^4+2a^8}$, on aura.....
$10ab\sqrt[4]{b^4+2a^4}$.

## XVI.

Multiplication et division des quantités radicales qui ont les mêmes exposans.

A l'égard de la multiplication et de la division, si les quantités radicales sont de même exposant, c'est encore la même méthode que dans les radicaux du second degré; il suffit de faire l'opération sur les quantités précédées du signe radical, et de mettre le même signe devant le produit, ou devant le quotient, suivant qu'il sera question d'une multiplication ou d'une division.

Exemples.

C'est ainsi que $\sqrt[3]{5ayy} \times \sqrt[3]{7ayz} \ldots\ldots = \sqrt[3]{35aay^3z}$, ou $y\sqrt[3]{35a^2z}$.

Que $\sqrt[5]{\frac{9a^2b^3}{4}} \times \sqrt{27a^3b^6} = \sqrt[5]{\frac{243a^5b^9}{4}} \ldots\ldots = 3ab\sqrt[5]{\frac{b^4}{4}}$.

Que $\sqrt[3]{a^2b^2 \pm b^4}$ divisé par $\sqrt[3]{\frac{a^2-b^2}{8b}}$ donne pour quotient $\sqrt[3]{\frac{8a^2b^3+8b^5}{a^2-b^2}} = 2b\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$.

Que $\frac{\sqrt[3]{(a^2x^3-x^5)}}{\sqrt[3]{(ab^4+b^4)}} = \frac{x}{b}\sqrt[3]{\frac{a-x}{b}}$.

## XVII.

Pour faire ces opérations sur les quantités radicales de différens exposans, il faut les réduire au même exposant.

Mais si l'on veut faire ces mêmes opérations sur les quantités radicales de différens signes, et qu'on ne veuille pas se contenter de la simple marque de multiplication, il faut changer ces quantités radicales en d'autres, d'un radical plus composé, qui soit le même pour chacune des deux quantités à multiplier ou à diviser.

Méthode pour cette réduction. Qu'on ait, par exemple, $\sqrt[3]{ab}$ et $\sqrt[5]{abb}$ à réduire à un même signe, j'éleve $ab$ à la puissance 5, et j'écris $\sqrt[15]{}$, au lieu de $\sqrt[3]{}$, et j'ai la quantité $\sqrt[15]{a^5b^5}$ qui est la même chose que $\sqrt[3]{ab}$. J'éleve de même $ab^2$ à la troisieme puissance, et je mets $\sqrt[15]{}$ au lieu de $\sqrt[5]{}$; ce qui change la quantité $\sqrt[5]{ab^2}$ en $\sqrt[15]{a^3b^6}$. Ainsi, s'il avoit fallu multiplier $\sqrt[3]{ab}$ par $\sqrt[5]{abb}$, il seroit venu pour produit $\sqrt[15]{a^8b^9}$; et si j'avois eu à diviser la premiere par la seconde, j'aurois trouvé pour quotient $\sqrt[10]{\frac{a^5b^5}{a^3b^6}} = \sqrt{\frac{a^2}{b}}$.

De même le produit de $\sqrt[3]{a^2b^4}$ par $\sqrt{a^4b^5}$ auroit été $\sqrt[6]{a^{16}b^{23}} = a^2b^3\sqrt[6]{a^4b^5}$.

En général, pour réduire deux quantités radicales $\sqrt[m]{a^p b^q}$ et $\sqrt[n]{a^r b^s}$ à un même signe, on changera la premiere en $\sqrt[mn]{a^{pn}b^{qn}}$, et la seconde en $\sqrt[mn]{a^{rm}b^{sm}}$. S'il est question alors de les multiplier, leur produit sera $\sqrt[mn]{a^{pn+rm}b^{qn+sm}}$; et si on vouloit diviser la premiere par la seconde, le quotient seroit $\sqrt[mn]{a^{pn-rm}b^{qn-sm}}$.

Lorsque les deux quantités radicales auront pour exposans des nombres qui auront un commun diviseur, on voit qu'il ne sera pas nécessaire de changer chaque radical en un autre, dont

dont l'exposant soit le produit des deux premiers exposans. Que l'on ait, par exemple $\sqrt{ab}$ et $\sqrt[4]{ab^3}$, on changera le premier en $\sqrt[4]{a^2b^2}$. Qu'on ait de même $\sqrt[4]{a^3b}$ et $\sqrt[4]{a^5b}$, on changera la premiere en $\sqrt[12]{a^9b^3}$, et la seconde en $\sqrt[12]{a^{10}b^2}$.

## XVIII.

Autre maniere de faire les opérations précédentes.

On peut trouver une autre méthode pour faire les opérations précédentes, en employant une réflexion sur la nature des quantités radicales, qui suit assez naturellement de ce qu'on a dit art. VIII, pour extraire toutes sortes de racines. C'est que les quantités radicales peuvent être regardées comme des puissances dont les exposans sont fractionnaires.

Pour faire voir, non-seulement comment on est arrivé à cette réflexion, mais la maniere dont on en a fait usage, cherchons, par le moyen de ce que nous avons vu précédemment, à trouver ce que peuvent être les quantités $\sqrt[m]{a^p b^q}$ et $\sqrt[n]{a^r b^s}$ employées dans l'exemple précédent.

Suivant ce qu'on a dit, art. VIII, si on avoit les nombres qu'expriment les exposans $p$ et $q$, on les diviseroit par le nombre que $m$ désigne, et prenant leur quotient pour servir d'exposans à $a$ et à $b$, on auroit la premiere quantité exprimée par $\sqrt[m]{a^p b^q}$. Mais sans savoir les valeurs particulieres de $p$, $q$, $m$,

il est évident qu'on peut, en cette occasion, comme en toutes les autres, écrire généralement $\frac{p}{m}$ et $\frac{q}{m}$ pour les quotiens de la division de $p$ et de $q$ par $m$, c'est-à-dire, pour les exposans de $a$ et de $b$ dans la racine $m$ de $a^p b^q$. Donc $a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}$ est cette racine. De même $\sqrt[n]{a^r b^s}$ sera $a^{\frac{r}{n}} b^{\frac{s}{n}}$. Pour multiplier présentement les deux quantités $a^{\frac{r}{n}} b^{\frac{s}{n}}$ et $a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}$, dans lesquelles sont changées les quantités qu'on avoit à multiplier, art. XVII, il faut, comme dans toutes les multiplications de quantités incomplexes, ajouter les exposans des mêmes lettres, c'est-à-dire, $\frac{p}{m}$ et $\frac{q}{m}$ avec $\frac{r}{n}$ et $\frac{s}{n}$ ce qui donnera $a^{\frac{p}{m}+\frac{r}{n}} \quad b^{\frac{q}{m}+\frac{s}{n}}$

ou $a^{\frac{p\,n+r\,m}{m\,n}} \quad b^{\frac{q\,n+s\,m}{m\,n}}$,

en mettant les fractions $\frac{p}{m}$ et $\frac{r}{n}$ au même dénominateur, aussi bien que $\frac{q}{m}$ et $\frac{s}{n}$.

Ainsi $a^{\frac{p\,n+r\,m}{m\,n}} \quad b^{\frac{q\,n+s\,m}{m\,n}}$, c'est-à-dire, le produit de $a$ élevé à la puissance $\frac{p\,n+r\,m}{m\,n}$ par $b$ élevé à la puissance $\frac{qn+sm}{mn}$ est le produit des quantités proposées.

Il est aisé de voir présentement l'identité de cette expression $a^{\frac{pn+rm}{mn}} \quad b^{\frac{qn+sm}{mn}}$, et de l'ex-

pression $\sqrt[mn]{a^{pn+rm}\,b^{qn+sm}}$ qu'on avoit trouvée dans l'article XVII. Car, par la même raison qu'on vient de voir, que $\sqrt[m]{a^p}$ et $a^{\frac{p}{m}}$, ne désignoient que la même quantité, on doit voir que $a^{\frac{pn+rm}{mn}}$ et $\sqrt[mn]{a^{pn+rm}}$ sont la même chose, ainsi que $\sqrt[mn]{b^{qn+sm}}$ et $b^{\frac{qn+sm}{mn}}$.

Si on avoit voulu, au contraire, diviser la première quantité $\sqrt[m]{a^p\,b^q}$ par la seconde $\sqrt[n]{a^r\,b^s}$, on auroit retranché l'exposant $\frac{r}{n}$ de $\frac{p}{m}$ et l'exposant $\frac{s}{n}$ de $\frac{q}{m}$, et l'on auroit eu $a^{\frac{p}{m}-\frac{r}{n}}\,b^{\frac{q}{m}-\frac{s}{n}}$, ou $a^{\frac{pn-rm}{mn}}\,b^{\frac{qn-sm}{mn}}$ pour le quotient.

Afin qu'on se familiarise avec cette transformation de quantités radicales, en puissances fractionnaires, il sera bon d'en faire encore quelqu'application. Soit proposé, par exemple, de diviser $\sqrt[2p]{a^m b^{3n} c^2}$ par $\sqrt[p]{a^{2m} b^n c}$. On changera d'abord la premiere quantité en $a^{\frac{m}{2p}}\,b^{\frac{3n}{2p}}\,c^{\frac{1}{p}}$ et la seconde en $a^{\frac{2m}{p}}\,b^{\frac{n}{p}}\,c^{\frac{1}{p}}$, ensuite on retranchera les exposans $\frac{2m}{p}$, $\frac{n}{p}$, $\frac{1}{p}$, qu'ont les lettres $a$, $b$, $c$ dans la seconde, des exposans $\frac{m}{2p}$, $\frac{3n}{2p}$, $\frac{1}{p}$, qu'ont les mêmes lettres

dans la premiere, et les restes $-\frac{m}{2p}$, $\frac{n}{2p}$, 0, seront les exposans à donner aux mêmes lettres dans le quotient, c'est-à-dire, que $a^{-\frac{m}{2p}} b^{\frac{n}{2p}} c^0$ est ce quotient.

Lorsqu'on trouve une pareille quantité, il est naturel qu'on soit un peu embarrassé à savoir ce qu'elle signifie; car, n'ayant point encore rencontré d'exposant qui soit ou zéro, ou négatif, on ne sait ce que deviennent les quantités dont elles sont les exposans.

Pour le découvrir, soit reprise la question dans l'endroit où commence à paroître la difficulté, c'est-à dire, lorsqu'on retranche les exposans $\frac{2m}{p}$ de $\frac{m}{2p}$ et $\frac{1}{p}$ de $\frac{1}{p}$ afin de diviser $a^{\frac{m}{2p}}$ par $a^{\frac{2m}{p}}$ et $c^{\frac{1}{p}}$ par $c^{\frac{1}{p}}$; c'est donc à la place de $\frac{c^{\frac{1}{p}}}{c^{\frac{1}{p}}}$ qu'on met $c^0$; et à la place de $\frac{a^{\frac{m}{2p}}}{a^{\frac{2m}{p}}}$ qu'on met $a^{-\frac{3m}{2p}}$; mais au lieu de $\frac{a^{\frac{m}{2p}}}{a^{\frac{2m}{p}}}$ on peut mettre

$a^{\frac{1}{\frac{3m}{2p}}}$ à cause que $a^{\frac{2m}{p}}$ est le produit de $a^{\frac{3m}{2p}}$ par $a^{\frac{m}{p}}$ ; et au lieu de $\frac{c^{\frac{1}{p}}}{c^{\frac{1}{p}}}$ on peut mettre 1. Donc les deux quantités à examiner $a^{\frac{3m}{2p}}$ et $c^{q}$ expriment, l'une $a^{\frac{1}{\frac{3m}{2p}}}$, et l'autre 1. Et partant le quotient cherché de $\sqrt[2p]{a^m b^{3n} c^2}$ divisé par ...

$\sqrt[p]{a^m b^n c}$ est $a^{\frac{1}{\frac{3m}{2p}}} \times b^{\frac{n}{2p}} \times 1$, ou $\frac{b^{\frac{n}{2p}}}{a^{\frac{3m}{2p}}}$

## XIX.

La nouveauté des expressions qu'on vient d'employer dans l'article précédent, et la généralité qu'elles apportent dans l'analyse, méritent qu'on en fasse une courte récapitulation, en les réduisant en principes généraux.

1.° *A une quantité quelconque, dont l'exposant sera une fraction, l'on pourra toujours substituer la racine d'une quantité dont l'exposant sera un entier; pourvû que le dénomi-*

Ce que c'est qu'une puissance fractionnaire

*nateur de cette fraction serve d'exposant au signe-radical, et que son numérateur soit l'exposant de la quantité qui est sous le signe*, c'est-à-dire, en termes algébriques, qu'en général .....

$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$.

Ce que c'est qu'une puissance négative.

2°. *Lorsqu'une quantité a un exposant négatif, on la peut changer en une fraction, dont le numérateur est l'unité, et dont le dénominateur est la même quantité avec un exposant égal au proposé, mais avec le signe* +, c'est-à-dire, qu'en général .....

$a^{-m} = a^{\frac{1}{m}}$.

Ce que c'est que la puissance 0.

3°. *Toute quantité, dont l'exposant est zéro, se réduit à l'unité*, c'est-à-dire que, $a^0 = 1$.

La démonstration de ces trois propositions prises dans leur plus grande généralité, ne demande point d'autres argumens que ceux qu'on a employés dans l'article précédent. Cependant, pour se ressouvenir plus aisément de ces propositions, et pour s'en servir avec plus de confiance, il est à propos de les considérer à part; ce qui se fera facilement de la manière suivante.

1°. On démontrera que $a^{\frac{n}{m}}$ est la racine

$m$ de $a^n$, si on fait voir qu'en élevant $a^{\frac{n}{m}}$ à la puissance $m$, il vient $a^n$. Or, pour élever $a^{\frac{n}{m}}$ à la puissance $m$, il est évident qu'il faut multiplier son exposant par $m$; ce qui donnera $a^{\frac{n}{m}\times m}$, ou $a^n$.

2°. $a^{=m}$ sera nécessairement égal à $a^{\frac{1}{m}}$ si, en multipliant ces deux quantités par une même puissance de $a$, il vient le même produit. Or, qu'on les multiplie l'une et l'autre par une puissance de $a$ plus élevée que $m$, telle que $a^{2m}$, par exemple, on aura $a^{2m}\times a^{-m}$, ou $a^{2m-m}$, ou $a^m$ pour le produit de $a^{2m}$ par $a^{-m}$; et de même $\frac{a^{2m}\times 1}{a^m}$, ou $a^m$ pour le produit de $a^{2m}$ par $a^{\frac{1}{m}}$. Donc $a^{-m}$ et $\frac{1}{a^m}$ sont égaux.

3°. Par la même raison $a^\circ$ et 1 sont égaux, puisqu'en multipliant $a^\circ$ par $a$, il vient $a^{\circ+1}=a^1=a$, aussi bien qu'en multipliant 1 par $a$.

Comme ces trois seules propositions suffisent pour toutes les réductions et les transformations de même espece que les précédentes, et pour une infinité d'autres opérations, les commençans ne sauroient trop s'exercer à en faire des applications. Afin de leur en faciliter

les moyens, j'ai joint plusieurs exemples dans la troisieme Case de la Table ci-jointe.

## XX.

Après avoir résolu toutes les difficultés qu'on pouvoit rencontrer dans les équations à deux termes, il est naturel qu'on ait cherché aussi à résoudre généralement toutes celles qui n'ont que trois termes; mais on est bien loin encore d'avoir trouvé une méthode générale pour toutes les équations de cette nature; on s'est contenté de les résoudre dans quelques cas particuliers. Par exemple, on a trouvé une classe d'équation assez étendue, qui pouvoit se réduire facilement aux deux cas que nous avons déjà vus, celui des équations du second degré, et celui des équations à deux termes d'un degré quelconque.

Des équations à trois termes qui se résolvent par la méthode du second degré.

Ces équations sont toutes celles qu'on peut mettre sous cette forme générale $x^{2m}+ax^m=b$. Pour les résoudre, on ajoutera, ainsi que dans les équations du second degré, ce qui peut faire un quarré du premier membre. On aura donc $x^{2m}+ax^m+\frac{1}{4}aa=b+\frac{1}{4}aa$ dont la racine est $x^m+\frac{1}{2}a=\pm\sqrt{(b+\frac{1}{4}aa)}$, et par conséquent $x^m=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{(b+\frac{1}{4}aa)}$, équation qui n'a que deux termes, et de laquelle on tire.....

$$x=\sqrt[m]{(-\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{(b+\tfrac{1}{4}aa)})}.$$

$+150b^4y^2+125b^6$

$+150b^4y^2+125b^6$
$-150b^4y^2-125b^6$

0 0

Case 1.

$r^3+21b^2x^2+18b^3x+9b^4$
$^3+4b^2x^2$
$+3b^2$

$^5+21b^2x^4+44b^3x^3+$

$+21b^2x^4+44b^3x^3$
$-12b^2x^4-8b^3x^3$

$9b^2x^4+36b^5x^3+63$
$-9b^2x^4-36b^3x^3-63$

0 0

Case 2.

Case 3.

$b^{\frac{3}{2}}$

$a^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}\,b^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{b\sqrt{b}\sqrt[3]{a}}$

$a^{-\frac{1}{2}}\,b^{-1\frac{1}{2}}\,c = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}$

$= \frac{\sqrt[12]{a^5c^{11}}}{\sqrt[3]{b^4}} = \frac{c^2\sqrt[12]{a}}{b\sqrt[3]{b}}$

Par cette formule, on résoudra toutes les équations à trois termes, dont le premier sera affecté d'une puissance d'$x$, double de celle qui affecte le second terme, et dont le troisieme sera une quantité connue. Il est clair, par cette expression, et par ce qu'on sait déjà sur les racines des équations, que toutes les équations renfermées dans la formule générale $x^{2m}+ax^m=b$ ne peuvent pas avoir plus de quatre racines réelles, et qu'elles n'en auront que deux lorsque $m$ sera un nombre impair.

## XXI.

Exemple de la méthode précédente.

Pour faire quelqu'application de cette méthode, supposons d'abord qu'on ait l'équation $x^4-bbxx=bbcc$. En ajoutant des deux côtés $\frac{1}{4}b^4$, quarré de la moitié du coëfficient de $xx$, on aura $x^4-bbxx+\frac{1}{4}b^4=\frac{1}{4}b^4+bbcc$ dont la racine quarrée est $xx-\frac{1}{2}bb=\pm b\sqrt{(\frac{1}{4}bb+cc)}$, d'où l'on tire $xx=\frac{1}{2}bb\pm b\sqrt{(\frac{1}{4}bb+cc)}$, et partant $x=\pm\sqrt{(\frac{1}{2}bb\pm b\sqrt{(\frac{1}{4}bb+cc)})}$, susceptible de deux valeurs réelles et de 2 imaginaires. Les premieres sont $x=\pm\sqrt{(\frac{1}{2}bb+b\sqrt{(\frac{1}{4}bb+cc)})}$, les deux autres $x=\pm\sqrt{(\frac{1}{2}bb-b\sqrt{(\frac{1}{4}bb+cc)})}$, nécessairement imaginaires, à cause que $b\sqrt{(\frac{1}{4}bb+cc)}$ est plus grand que $\frac{1}{2}bb$.

## XXII.

Autre exemple.

Soit ensuite l'équation $x^6-2a^2bx^3=a^6$, ajoutant des deux côtés $a^4bb$, il vient $x^6-2aabx^3+a^4bb=a^4bb+a^6$, dont la racine

quarrée est $x^3 - aab = a^2\sqrt{(aa+bb)}$, ou $x^3 = aab \pm a^2\sqrt{(aa+bb)}$, qui donne enfin... $x = \sqrt[3]{(aab \pm a^2\sqrt{(a^2+b^2)})}$ susceptible de deux valeurs réelles; l'une positive, l'autre négative. Les quatre autres racines de la même équation, qu'on trouveroit facilement en opérant comme dans l'article III, seroient imaginaires.

XXIII.

Troisieme exemple. Soit à présent $x^4 - (aa+bb)\,xx = -aabb$ en ajoutant des deux côtés $\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}aabb + \frac{1}{4}b^4$, on aura $x^4 - (aa+bb)\,xx + \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}aab^2 + \frac{1}{4}b^4 = \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{2}aabb + \frac{1}{4}b^4$, dont le second membre est aussi bien un quarré que le premier. Prenant donc la racine quarrée de part et d'autre, on aura $xx - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb = \pm\frac{1}{2}aa \pm \frac{1}{2}bb$, qui donne $xx = aa$ et $xx = bb$, c'est-à-dire, $x = \pm a$ et $x = \pm b$, qui sont les quatre racines de l'équation $x^4 - (aa+bb)\,xx = -aabb$. On auroit trouvé également ces racines par les méthodes de la troisieme Partie, en cherchant les diviseurs commensurables.

XXIV.

Quatrieme exemple. Soit encore l'équation $x^4 - (2gh+4ff)\,xx = -gghh$, on aura, en ajoutant le quarré de la moitié du coefficient du second terme, et en prenant ensuite la racine quarrée, $x^2 - gh - 2ff = \pm 2f\sqrt{(gh+ff)}$ qui donne..... $x = \pm\sqrt{(gh+2ff \pm 2f\sqrt{(gh+ff)})}$.

Or, en réfléchissant un peu sur cette quantité, il n'est pas difficile de reconnoître que ce qui est sous le signe radical est un quarré, celui de $f \pm \sqrt{(ff+gh)}$. Car le terme..... $2f\sqrt{(gh+ff)}$, est le double du produit de $f$ et de $\sqrt{(gh+ff)}$, et la quantité $gh+2ff$ contient le quarré de $f$ et le quarré $ff+gh$ de la partie radicale.

Ainsi la valeur précédente de $x$ se réduit, en supposant qu'on eut choisi le signe + pour le premier radical, à $f \pm \sqrt{(ff+gh)}$. En supposant, au contraire, qu'on eût pris le second signe — du même premier radical, elle se seroit réduite à $-f \pm \sqrt{(ff+gh)}$; ce sont-là les quatre racines de l'équation

$$x^4 - 2ghxx - 4ffxx = -gghh.$$

Dans cet exemple, l'habitude du calcul pouvoit faire facilement soupçonner que la quantité $gh+2ff \pm 2f\sqrt{(gh+ff)}$ avoit une racine quarrée; mais il pourroit y avoir beaucoup de cas où les quantités trouvées de la même maniere, seroient également des quarrés, sans qu'on s'en doutât : il est donc à propos de chercher une méthode générale pour reconnoître ces sortes de quantités, et pour trouver leurs racines.

## XXV.

Pour y parvenir, je commence par remarquer que la racine d'une quantité composée de deux parties, dont l'une est commensurable, Méthode pour trouver les racines quarrées

des quantités en partie commensurables, et en partie radicales,

et dont l'autre est un radical du second degré, doit être elle-même composée de deux parties, et qu'au moins l'une des deux doit être un radical.

Cela posé, je prends $A+B$ pour exprimer, en général, la quantité proposée, $A$ désignant la partie rationnelle, et $B$ un radical quelconque du second degré, je prends ensuite $p+q$ pour exprimer la racine cherchée.

Je remarque maintenant que soit que $p$ désigne la quantité radicale, soit qu'on l'ait exprimée par $q$, ou que $p$ et $q$ soient l'un et l'autre des radicaux, le quarré $p^2+2pq+q^2$ ne pourra avoir que le terme $2pq$ de radical. Comparant donc ce quarré avec la quantité donnée, $2pq$ représentera $B$, et $p^2+q^2$, $A$, c'est-à-dire, en termes algébriques, qu'on aura pour déterminer $p$ et $q$ les deux équations... $p^2+q^2=A$, et $2pq=B$.

On tire de la seconde $p=\frac{B}{2q}$ qui, étant substituée dans la premiere, donne $\frac{B^2}{4q^2}+q^2=A$, ou $q^4-Aq^2=-\frac{B}{4}$, ou ..... $q^2-\frac{1}{2}A=\pm\frac{1}{2}\sqrt{(AA-BB)}$, et partant.... $q=\pm\sqrt{(\frac{1}{2}A\pm\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-B^2)})}$. Substituant ensuite cette valeur de $q$ dans l'équation $p^2+q^2=A$, ou $p=\pm\sqrt{(A-q^2)}$, on a..... $p=\pm\sqrt{(\frac{1}{2}A\mp\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-B^2)}}$. Donc la racine cherchée de la quantité $A+B$ est..... $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}A\pm\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-B^2)})}+\sqrt{(\frac{1}{2}A\mp\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-B^2)})}$

ou simplement.....
$\pm\sqrt{(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-B^2)})}\pm\sqrt{(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-B^2)})}$
car il est évident que cette expression revient absolument au même que l'expression
$\pm\sqrt{(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-B^2)})}\pm\sqrt{(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-B^2)})}$
qu'on auroit, en prenant en — le signe de $\sqrt{(A^2-B^2)}$.

Quant aux signes que doivent avoir les deux parties $\sqrt{(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-B^2)})}$.....
et $\sqrt{(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-B^2)})}$ de la racine cherchée de $A+B$., ils doivent être les mêmes, si le radical $B$ est positif; et contraires, si $B$ est négatif. Car il est aisé de voir qu'en général $p+q$, ou $-p-q$ étant la racine de $A+B=pp+qq+2pq$,
$p-q$, ou $-p+q$ est celle de.....
$A-B=pp+qq-2pq$.

XXVI.

La valeur qu'on vient de trouver pour la racine de la quantité $A+B$, pourroit faire craindre qu'il ne restât encore une difficulté pareille à celle qu'on avoit d'abord à résoudre. Car $\sqrt{(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-B^2)})}$.....
et $\sqrt{(\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-B^2)})}$ semblent au premier coup-d'œil désigner des racines des quantités en partie rationelle, et en partie irrationelles; et, si cela étoit, la question ne seroit pas plus avancée qu'elle n'étoit. Il faut donc, pour que la méthode soit de quelqu'utilité, que la quantité $A-B$:

qui se trouve sous le signe radical, soit un quarré commensurable. Or, c'est ce qui ne sauroit manquer d'arriver, toutes les fois que $A+B$ sera dans le cas d'avoir une racine. Pour s'en assurer, il suffit de se ressouvenir (article XXV), que $p-q$ est $\surd(A-B)$ en même tems que $p+q$ est $\surd(A+B)$; car on en tirera tout de suite que $\surd(A-B)\times\surd(A+B)$, ou $\surd(AA-BB)$ est $(p-q)\times(p+q)$ ou $pp-qq$, c'est-à-dire, une quantité commensurable.

XXVII.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Pour montrer présentement l'application de la méthode précédente, soit pris, pour exemple, la quantité $aa+2c\surd(aa-cc)$. En la comparant avec $A+B$, on a $a^*=A$ et..... $B=2c\surd(aa-cc)$, et par conséquent $\surd(A^*-B^*)=aa-2cc$, d'où l'on tire

$$\surd\left(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}\surd(A^*-B^*)\right)=\surd(aa-cc),$$

on trouve de même

$$\surd\left(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}\surd(A^*-B^*)\right)=c;$$

c'est-à-dire, que la racine cherchée est

$$c+\surd(aa-cc), \text{ ou } -c-\surd(aa-cc).$$

XXVIII.

Autre exemple.

Si on avoit à prendre la racine quarrée de $16+6\surd 7$, en faisant $A=16$ et $B=6\surd 7$, on auroit $\surd(AA-BB)=2$, et partant

$$\surd\left(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}\surd(AA-BB)\right)=3$$

et $\surd\left(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}\surd(AA-BB)\right)=\surd 7$;

d'où $3+\sqrt{7}$, ou $-3-\sqrt{7}$ seroit la racine cherchée.

XXIX.

Qu'on demande maintenant la racine de

$$ap-2a\sqrt{(ap-aa)}.$$

Faisant $A=ap$ et $B=-2a\sqrt{ap-aa}$, on a

$$\sqrt{(AA-BB)}=ap-2aa$$

et $\sqrt{(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{(AA-BB)})}=\sqrt{(ap-aa)}$, et de même

$$\sqrt{(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}\sqrt{(A^2-B^2)})}=a$$

c'est-à-dire que la racine cherchée sera

$$\sqrt{(ap-aa)}-a, \text{ ou } a-\sqrt{(ap-aa)}.$$

XXX.

Troisieme exemple

Si la quantité proposée est

$$b^2-ab+\tfrac{1}{4}a^2+2\sqrt{(ab^3-2a^2b+\tfrac{1}{4}a^3b)},$$

on aura

$$A=b^2-ab+\tfrac{1}{4}aa, B2=\sqrt{(ab^3-2ab^2+\tfrac{1}{4}a^3b)},$$

et

$$\sqrt{(A^2-B^2)}=\sqrt{(b^4-6ab^3+\tfrac{19}{4}a^2b^2-\tfrac{3}{2}a^3b+\tfrac{1}{16}a^4)}$$
$$=bb-3ab+\tfrac{1}{4}aa,$$

ce qui donnera

$$\sqrt{(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}\sqrt{(A^2-B^2)})}=\sqrt{bb-2ab+\tfrac{1}{4}aa)},$$

et $\sqrt{(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}\sqrt{(A^2-B^2)})}=\sqrt{ab}$

d'où la racine cherchée est

$$\sqrt{ab}+\sqrt{(bb-2ab+\tfrac{1}{4}aa)},$$

ou $\sqrt{(-ab)}-\sqrt{(bb-2ab+\tfrac{1}{4}aa)}.$

Cet exemple est plus propre que les précédens à faire voir la nécessité d'une méthode

particuliere, pour prendre la racine des quantités en partie rationnelles et en partie irrationnelles. Car, dans le cas précédens, la racine cherchée ne contenant qu'un radical, pouvoit être tirée d'une équation du second degré qui auroit été contenue dans l'équation, pour la résolution de laquelle on avoit cherché à prendre cette racine. Au lieu que, dans ce dernier, la valeur de la racine cherchée contenant deux radicaux, il est impossible qu'elle vînt d'aucune équation du second degré. En effet, lorsque nous avons eu à prendre (article XXVII) la racine de

$$aa + 2c\sqrt{(aa - cc)},$$

la question étoit la même, que si on avoit dû résoudre l'equation

$$x^4 - 2aaxx + 4aacc + 4c^2 + a^4 = 0$$

de laquelle on pouvoit tirer par la III^eme^ partie, article XXXVI, les équations

$$xx - 2cx + 2cc - aa = 0,$$

et $$xx + 2cx + 2cc - aa = 0.$$

Mais la racine de

$$b^2 - ab + \tfrac{1}{4}aa + 2\sqrt{(ab - 2ab^2 + \tfrac{1}{4}a^3b)}$$

devoit servir à la résolution de

$$x^4 + 2\,(ab - bb - \tfrac{1}{4}aa)\,x^2 + \tfrac{19}{2}a^2b^2 - 6ab^3 - \tfrac{3}{2}a^3b + b^4 + \tfrac{1}{16}a^4 = 0$$

qui n'est point décomposable en deux équations du second degré.

## XXXI.

Après avoir appris à distinguer, parmi les quantités

quantités qui sont en partie rationelles, et en partie irrationelles, celles qui sont des quarrés, on a dû chercher à distinguer aussi celles qui sont des cubes ou d'autres puissances plus élevées, puisque cela étoit nécessaire pour avoir complettement tout ce qui regarde les équations comprises sous la forme $x^m + ax^m = b$, ou

$$\sqrt[m]{(-\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(b + \tfrac{1}{4}aa)})}$$

Voyons d'abord ce que l'on pouvoit faire pour le cas où $m = 3$, c'est-à-dire, pour trouver la racine cube d'une quantité quelconque $A + B$, dans laquelle $A$ est rationel, et $B$ un radical du second degré.

Méthode pour trouver la racine cube des quantités en partie commensurables et en partie incommensurables.

Nous remarquerons d'abord que la racine cube d'une quantité de cette nature, ne peut pas renfermer plus d'un radical du second degré; car on voit bien que le cube d'une quantité, telle que $\sqrt{m} + \sqrt{n}$, qui contiendroit deux de ces radicaux, ne pourroit pas manquer d'être affecté de ces mêmes radicaux.

Nous remarquerons ensuite que la même racine cube cherchée ne pourra pas contenir d'autre espece de radicaux, à moins que ce ne soit un radical cube, et qu'il ne soit commun aux deux parties de la racine. Telle seroit, par exemple, la quantité $f\sqrt[3]{m} + \sqrt{g} \times \sqrt[3]{m}$ dont le cube $mf^3 + 3mffg + (3mff + mg)\sqrt{g}$, ainsi que la quantité proposée $A + B$, a une partie commensurable, et une partie radicale du second degré.

Cela posé, soit pris $p+q$ pour exprimer la racine cherchée, $q$ étant la partie affectée du radical du second degré, soit qu'il se trouve d'ailleurs, ainsi que $p$, affecté d'un radical cube, soit qu'ils n'en contiennent ni l'un ni l'autre.

Il est évident que le cube $p^3+3\,p^2\,q+3p\,q^2+q^3$ ne contiendra pas d'autre radical que le radical du second degré qui est dans $q$, et qu'il n'y aura que les termes $3pp\,q$ et $q^3$ qui soient affectés de ce radical. On comparera donc ces deux termes à la quantité donnée $B$, et les deux autres à $A=p^3+3pq^2$ et $B=3p^2q+q^3$.

Pour résoudre ces deux équations, il faut d'abord commencer par chasser l'une des deux inconnues $p$ ou $q$, ce qui se peut faire aisément par les principes établis dans la seconde Partie, article XXXIII. Mais on peut abréger le calcul par le secours d'une remarque qui a dû se présenter facilement à des Algebristes un peu exercés, c'est que $AA-BB$ sera toujours le cube de $pp-qq$, lorsque $A+B$ sera le cube de $p+q$. Car il est clair premiérement que si $p+q$ est la racine cube de $p^3+3\,pq^2+3\,p^2q+q^3$ dont la premiere partie $p^3+3\,pq^2$ est $A$, et la seconde $3\,p^2q+q^3$ est $B$, il faut nécessairement que $p-q$ soit la racine cube de $A-B$ qui est alors $p^3+3pq^2-3p^2q-q^3$. Or de-là il suit que $pp-qq$, ou $(p-q)\,(p+q)$ est $\sqrt[3]{(A+B)}\,\sqrt[3]{(A-B)}$, c'est-à-dire, $\sqrt[3]{(AA-BA)}$.

Cela posé, on a donc l'équation $\sqrt[3]{(A^2-B^2)} = p^2-q^2$, ou $n = p^2-q^2$, dans laquelle $n$ est donnée, et ne peut être qu'une quantité commensurable, ou un simple radical cube. De l'équation $n=p^2-q^2$, ou $q^2=p^2-n$, et de l'équation $A=p^3+3pq^2$, on tire tout de suite $4p^3-3pn-A=0$, équation qu'il faut résoudre pour avoir la premiere partie $p$ de la racine cube cherchée. Aussi-tôt qu'elle sera résolue, on aura la seconde partie de cette même racine cube cherchée en employant l'équation $q=\sqrt{(p^2-n)}$.

Quant au signe radical il sera positif, si le radical de la proposée a le signe +; et de même négatif, si le radical de la proposée a le signe —. Car on voit aisément que la partie radicale du cube de $p+q$, laquelle est $(3pp+qq)\times q$ sera toujours du même signe que $q$.

Si la racine de la quantité proposée $A+B$ ne doit point avoir de radical cube qui affecte tous ses termes, $n$, ou $\sqrt[3]{(A^2-B^2)}$ sera une quantité commensurable, et par conséquent l'équation $4p^3-3pn-A=0$ ne contiendra pas de radicaux; et comme $p$ sera alors commensurable, on ne pourra pas manquer de le trouver en cherchant tous les diviseurs de cette équation par la méthode donnée dans la III$_e$. Partie, art. XXXII.

Si la racine cherchée doit avoir ses deux

parties affectées d'un radical cube, ce qu'on aura reconnu, en ne trouvant point un cube parfait pour $A^2 - B^2$, on verra quelle est la quantité par laquelle il faudroit multiplier la quantité proposée pour en former une nouvelle dont les deux parties étant prises pour $A$ et pour $B$, donneroient pour $AA - BB$ un cube parfait. Trouvant alors la racine cube de cette nouvelle quantité mise à la place de la proposée, il ne faudroit plus que la diviser par la racine cube du multiplicateur dont on se seroit servi, et l'on auroit la racine cherchée.

Quant à la détermination de ce multiplicateur, il est clair qu'il ne demande autre chose que de trouver la quantité quarrée, par laquelle il faudroit multiplier la quantité qu'on a trouvée d'abord pour $AA - BB$, si on vouloit la rendre un cube parfait. Car il est clair que la racine quarrée de ce multiplicateur de $AA - BB$, seroit le multiplicateur qu'on devroit donner aux quantités proposées $A$ et $B$.

## XXXII.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Pour montrer l'application de cette méthode, supposons qu'on cherche la racine cube de la quantité.

$$7a^3 - 3a^2b + (5aa - ab)\sqrt{(2aa - ab)}.$$

Par la comparaison de cette quantité avec $A + B$, j'ai

$$7a^3 - 3a^2b = A; \ (5aa - ab)\sqrt{(2aa - ab)} = B,$$

et partant

$$A^2 - B^2 = -a^6 + 3a^5b - 3a^4b^2 + a^3b^3,$$

et $n$, ou $\sqrt[3]{(A^2 - B^2)} = -aa + ab$.

Substituant cette valeur de $n$, ainsi que celle de $A$ dans l'équation $4p^3 - 3pn - A = 0$, j'ai $4p^3 + 3paa - 3pab - 7a^3 + 3a^2b$ dont il est question de trouver un diviseur d'une dimension. On trouvera facilement par la méthode enseignée dans la troisieme partie, art. XXXII. que ce diviseur est $p - a$ c'est-à-dire, que la valeur $p$ est $a$. Substituant cette valeur de $p$ dans l'équation $q = \sqrt{(pp - n)}$, il vient..... $q = \sqrt{(2aa - ab)}$; Donc la racine cherchée est $a + \sqrt{(2aa - ab)}$.

## XXXIII.

Autre exemple.

Soit présentement proposé de prendre la racine cube de

$$2aac - abc - bbc - (2a - b)\sqrt{(aacc - bbcc)},$$

je commence par faire $2aac - abc - bbc = A$ et $B = -(2a - b)\sqrt{(aacc - bbcc)}$, ce qui me donne $A^2 - B^2 = 2b^4cc - 2ab^3cc$ qui n'est point un cube. Pour savoir ce qui peut le rendre cube, je le décompose en ses produisans, et il devient $2 \times cc \times (b - a) \times b^3$; d'où je découvre aisément qu'en le multipliant par $\frac{1 \times (b-a)^2}{cc}$ qui est une quantité quarrée, j'aurai un cube parfait, celui de $2 \times (b - a) \times b$, ou de $2bb - 2ab$; et par conséquent que si, on multiplie la quantité proposée par $\frac{2b - 2a}{c}$ racine du

quarré $\frac{4\times(b-a)^2}{c^2}$, on aura une nouvelle quantité

$$(2aa-ab-bb)(2b+2a)-$$
$$(2a-b)(2b-2a)\sqrt{(aa-bb)},$$

dont la premiere partie représentant $A$, et la seconde $B$, donnera pour $\sqrt[3]{(AA-BB)}$, c'est-à-dire, pour $n$, $2bb-2ab$. Je suppose donc que l'on m'eût en effet donné ces quantités pour $A$ et pour $B$, et que j'en eusse tiré cette valeur de $n$; dans ce cas l'équation, $4p^3-3pn-A=0$ donneroit

$$4p^3-3p\times(2bb-2ab)+$$
$$(bb+ab-2aa)\times(2b-2a)=0,$$

à laquelle on trouveroit, par la méthode donnée dans la III^e. partie, article XXXII, le diviseur $p+a-b$, c'est-à-dire, que la valeur de $p$ seroit alors $b-a$; la substituant dans $q=\sqrt{(pp-n)}$, on auroit $q=\sqrt{(aa-bb)}$

donc $b-a\pm\sqrt{(aa-bb)}$ seroit la racine cube de la nouvelle quantité, ou, ce qui revient au même, du produit de la quantité proposée par $\frac{2b-2a}{c}$.

Donc $\frac{(b-a\pm\sqrt{(aa-bb)})\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{(2-2a)}}$ est la racine cube cherchée de la quantité proposée.

Dans cet exemple, et dans tous ceux où la racine cherchée se trouvera affectée de radicaux cubes, il est clair qu'on ne sauroit, pour se dispenser d'employer la méthode précédente, avoir recours à la méthode de la III^e.

Partie, article XXXVI, c'est-à-dire, qu'on ne pourra trouver aucun diviseur dans l'équation dont la solution auroit conduit à donner pour valeur d'$x$ la racine cube cherchée. En effet, il est aisé de voir que l'équation $x^6 - 2x^3 \times (2aac - abc - bbc + 2b^4cc - 2ab^3cc)$ qui auroit donné

$$x = \sqrt[3]{(2aac - abc - bbc - (2a - b)\sqrt{(aacc - bbcc)})}$$

n'auroit point été décomposable.

Mais dans tous les cas où la racine cherchée doit être simplement composée d'un terme rationel et d'un irrationel du second degré, on parviendroit toujours à trouver cette racine en décomposant l'équation dont la solution auroit conduit à chercher la racine cube de la quantité proposée. Dans l'article XXXII, par exemple, où il étoit question de réduire l'expression

$$x = \sqrt[3]{(7a^3 - 3a^2b + (5aa - ab)\sqrt{(2aa - ab)})}$$

on auroit pu trouver dans l'équation

$$x^6 + (6a^2b - 14a^3) \times x^3 - a^6 + 3a^5b - 3a^4b^2 + a^3b^3 = 0,$$

d'où seroit venue cette valeur de $x$, une équation du second degré $xx - 2ax + ab - aa = 0$ qui auroit donné la même valeur de $x$.

## XXXIV.

Si les termes de la quantité, dont on veut prendre la racine cube, ont des diviseurs, on commencera par les mettre tous au même dénominateur, et on divisera ensuite la ra-

cine cube du numérateur par celle du dénominateur.

XXXV.

Méthode pour trouver les racines cubes des quantités numériques en partie commensurables, etc.

Lorsque la quantité proposée en partie commensurable et en partie incommensurable sera seulement numérique, on pourra trouver sa racine cube plus aisément que par la méthode précédente.

Car, en supposant d'abord que la racine cherchée ne doive point avoir de radical cube, mais qu'elle soit composée d'un nombre entier et d'une partie radicale simple et entiere aussi, on tire de ce que $p-q$ est $\sqrt[3]{(A-B)}$ lorsque $p+q$ est $\sqrt[3]{(A+B)}$, ou, ce qui revient au même, de ce que

$$p=\frac{\sqrt[3]{(A-B)}+\sqrt[3]{(A+B)}}{2}$$

une maniere simple d'avoir la partie commensurable de la racine cherchée, il ne faut pour cela que calculer en nombre entiers les plus proches les quantités $\sqrt[3]{(A-B)}$ et $\sqrt[3]{(A+B)}$, et prendre ensuite la moitié de ces deux nombres pour avoir la valeur exacte de $p$. Car en prenant pour

$$\sqrt[3]{(A-B)} \text{ et pour } \sqrt[3]{(A+B)}$$

les nombres entiers qui en approchent le plus, l'erreur qu'on peut commettre sur chacune de ces quantités ne sauroit être de $\frac{1}{2}$, et par conséquent il ne peut pas arriver que le nombre entier qui en résulte pour

$$\frac{\sqrt[3]{(A-B)}+\sqrt[3]{(A+B)}}{2},$$

c'est-à-dire, pour $p$, differe d'une unité de la vraie valeur de $p$; et comme cette valeur de $p$ doit être un nombre entier, elle sera donc exactement déterminé par ce moyen.

Ayant ainsi la valeur de $p$, et sachant déjà celle de $n$, ou de $\sqrt[3]{(AA-BB)}$, on substituera, comme dans la méthode précédente, les valeurs de $p$ et de $n$ dans $q=\sqrt{(pp-n)}$, et l'on aura la seconde partie de la racine cube cherchée.

Si la racine cherchée doit avoir ses deux termes affectés d'un même radical cube, ce qu'on aura reconnu en remarquant que $A^2-B^2$ n'étoit pas un cube parfait; il faudra, en suivant la même méthode que celle qu'on a employée dans les quantités littérales, chercher le nombre par lequel on devroit multiplier $A+B$ afin que $AA-BB$ fût un cube parfait : et ayant trouvé la racine de la nouvelle quantité que devient $A+B$ par cette multiplication, on n'aura qu'à la diviser par la racine cube du nombre dont on s'est servi pour multiplier $A+B$, et le quotient sera la racine cherchée.

## XXXVI.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Supposons, pour montrer l'application de cette méthode, qu'on cherche la racine cube de $7+5\sqrt{2}$. Ayant fait $A=7$, $B=5\sqrt{2}$, je trouve que $n$, ou $\sqrt[3]{(A^2-B^2)}=-1$. Je re-

marque ensuite que la valeur de $\sqrt[3]{(A+B)}$, ou de $\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})}$ est plus proche de deux que de 3; ainsi je prends 2 pour l'exprimer; remarquant de même que celle de $\sqrt[3]{(A-B)}$, ou de $\sqrt[3]{(7-5\sqrt{2})}$ est entre 0 et 1, mais plus proche de 0, je prends 0 pour cette quantité, et j'ai, par ce moyen, $p$, ou

$$\frac{\sqrt[3]{(A+B)}+\sqrt[3]{(A-B)}}{2}=1.$$

Je substitue alors cette valeur de $p$ dans $q=\sqrt{(pp-n)}$, et j'ai $q=\sqrt{2}$, d'où je conclus que, si la quantité proposée $7+5\sqrt{2}$ a une racine cube, elle est $1+\sqrt{2}$. En effet, cubant $1+\sqrt{2}$, il vient $7+5\sqrt{2}$.

## XXXVII.

Autre exemple.

Supposons présentement qu'on eût à prendre la racine cube de $5+3\sqrt{3}$; on trouveroit alors $AA-BB=-2$: or, 2 n'étant point cube, il faut chercher le nombre par lequel on auroit dû multiplier $5+3\sqrt{3}$ pour que $AA-BB$ eût été cube, ou, ce qui revient au même, il faut chercher le nombre le plus simple par le quarré duquel $AA-BB$, c'est-à-dire 2, étant multiplié, on aura un cube. Or, on voit tout de suite que 2 est lui-même ce nombre. Supposons donc que l'on se fût proposé de trouver la racine cube de $10+6\sqrt{3}$. On auroit eu alors $n=-2$ et

$$\frac{\sqrt[3]{(A+B)}+\sqrt[3]{(A-B)}}{2},$$

ou $\frac{\sqrt[3]{(10+6\sqrt{3})}+\sqrt[3]{(10-6\sqrt{3})}}{2}$

auroit été 1 en nombre entier le plus proche. Je substitue donc ces valeurs de $p$ et de $n$ dans $q=\sqrt{(pp-n)}$, et j'ai $q=\sqrt{3}$. J'examine maintenant si $p+q$, ou $1+\sqrt{3}$ est la racine cube de $10+6\sqrt{3}$, et je trouve qu'elle l'est en effet. D'où je conclus que $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ est la racine cube cherchée de $5+3\sqrt{3}$.

## XXXVIII.

Simplification de la méthode précédente.

On simplifiera le calcul d'approximation par lequel on détermine $p$, en remarquant qu'au lieu de

$$\frac{\sqrt[3]{(A+B)}+\sqrt[3]{(A-B)}}{2},$$

on peut écrire

$$\frac{\sqrt[3]{(A+B)}+\frac{n}{\sqrt[3]{(A+B)}}}{2}$$

à cause que $n$, ou

$$\sqrt[3]{(AA-BB)}=\sqrt[3]{(A-B)}\times\sqrt[3]{(A+B)}.$$

Or, cette expression est en effet plus simple que $\frac{\sqrt[3]{(A+B)}+\sqrt[3]{(A-B)}}{2}$, parce qu'il est plus facile de diviser par.... $\sqrt[3]{(A+B)}$, le nombre $n$ qui est supposé déjà trouvé, que de calculer séparément $\sqrt[3]{(A-B)}$.

XXXIX.

Application de la nouvelle méthode.

Pour montrer l'usage de cette nouvelle formule ; appliquons-la à l'exemple de l'article XXXVI, où $A$ étoit $= 7$, et $B = 5\sqrt{2}$; après avoir trouvé de même que dans cet article, que $n = -1$, et que $\sqrt[3]{(A+B)}$ en nombres entiers les plus proches étoit 2, au lieu de chercher, comme dans le même article, la racine cube approchée de $7 - 5\sqrt{2}$, je divise $n$, ou $-1$ par la valeur 2 de $\sqrt[3]{(A+B)}$, ce qui me donne $-\frac{1}{2}$ que je substitue dans la formule précédente.....

$$\frac{\sqrt[3]{(A+B)} + \frac{n}{\sqrt[3]{(A+B)}}}{2},$$

et j'ai $\frac{2-\frac{1}{2}}{2}$ ou 1 (prenant le nombre entier le plus proche) pour la valeur de $p$, ainsi qu'on l'avoit trouvé dans cet article par la formule $\frac{\sqrt[3]{(A+B)} + \sqrt[3]{(A-B)}}{2}$, le reste s'acheveroit de même.

XL.

Cette nouvelle méthode pourroit être fautive dans les cas où $A$ et $B$ sont des sig. différens.

Il est à remarquer cependant que cette nouvelle formule pourroit induire en erreur si $A$ et $B$ n'étoient pas de même signe ; car, dans le cas où ces quantités seroient de signes différens, la vraie valeur de $\sqrt[3]{(A+B)}$ pourroit être si petite auprès de $n$, que le nombre entier le plus proche qu'on prend à la place de cette valeur donneroit pour.....

$$\frac{\sqrt[3]{(A+B)}+\frac{n}{\sqrt[3]{(A+B)}}}{2},$$

un nombre qui différeroit du vrai d'une ou de plusieurs unités. Qu'on eût, par exemple, à prendre la racine cube de $45-29\sqrt{2}$ en faisant $A=45$ et $B=-29\sqrt{2}$, on auroit 1 pour le nombre entier le plus proche de $\sqrt[3]{(A+B)}$; ou $\sqrt[3]{(45-29\sqrt{2})}$, et comme $\sqrt[3]{(AA-BB)}$ seroit alors 7, la valeur de $p$, ou de..... $\frac{\sqrt[3]{(A+B)}+\frac{n}{\sqrt[3]{(A+B)}}}{2}$ se trouveroit en ce cas de 4, quoiqu'elle ne fût réellement que 3, ainsi qu'on peut le voir par l'expression .....

$$\frac{\sqrt[3]{(A+B)}+\sqrt[3]{(A-B)}}{2}$$

de la méthode précédente.

Ce qu'il faut faire en ce cas.

Mais pourvu que cette nouvelle méthode d'avoir $p$, soit d'un usage sûr, toutes les fois que $A$ et $B$ sont de même signe, il importe peu qu'elle soit applicable, lorsque ces quantités sont de signes différens. Car on voit bien que, dans ce cas, on n'a qu'à commencer par supposer $A$ et $B$ tous deux positifs, et en prendre la racine $p+q$. Ensuite faire $p$ du même signe que $A$, et $q$ du même signe que $B$.

Il ne s'agit donc plus que de s'assurer si toutes les fois que $A$ et $B$ sont de même signe, ou, ce qui revient au même si $A$ et $B$ étant tous deux positifs, on peut, sans craindre d'er-

reur, substituer dans $\frac{\sqrt[3]{(A+B)}+\frac{n}{\sqrt[3]{(A+B)}}}{2}$ à la place de $\sqrt[3]{(A+B)}$ le nombre entier le plus proche. Pour nous en convaincre, commençons par supposer, ce qui ne peut jamais aller si loin, qu'on se trompât de $\frac{1}{2}$ en prenant pour.... $\sqrt[3]{(A+B)}$ le nombre entier le plus proche. Dans ce cas la quantité qu'on trouveroit au lieu de $p$, seroit $\frac{\sqrt[3]{(A\pm B)}+\frac{1}{2}+\frac{n}{\sqrt[3]{(A+B)}\pm\frac{1}{2}}}{2}$. Pour faire voir que cette expression ne sauroit donner un nombre qui differe d'une unité de la vraie valeur de $p$, mettons dans cette quantité $p+q$ au lieu de $\sqrt[3]{(A+B)}$, et $pp-qq$ au lieu de $n$, elle deviendra $\frac{p+q\pm\frac{1}{2}\times\frac{pp-qq}{p+q\pm\frac{1}{2}}}{2}$ de laquelle retranchant $p$, on tire en réduisant $\frac{\pm q+\frac{1}{4}}{2p+2q\pm 1}$ pour l'erreur que peut apporter, dans la détermination de $p$, le choix qu'on a fait du nombre entier, au lieu de $\sqrt[3]{(A+B)}$. Or, il est clair que cette quantité ne sauroit jamais égaler $\frac{1}{2}$; car dans la premiere expression $\frac{q+\frac{1}{4}}{2p+2q+1}$ qu'elle renferme, le numérateur $q+\frac{1}{4}$ étant plus petit que la moitié de $2q+1$, est, à plus forte raison, plus petit que la moitié de $2p+2q+1$: et, dans la seconde expression, $\frac{-q+\frac{1}{4}}{2p+2q-1}$ qu'elle

renferme encore, le numérateur $-q+\frac{1}{4}$ étant plus petit que la moitié de $2q$, est par conséquent, plus petit aussi que la moitié de.... $2q+2p-1$.

Ainsi on ne sauroit se tromper d'une unité en déterminant $p$ par la méthode précédente, et par conséquent toutes les fois qu'une quantité comme $A+B$ (dans laquelle il n'entre que des nombres entiers, soit sous le signe radical : soit devant ce signe) devra avoir une racine cube $p+q$, qui ne contienne aucun nombre fractionnaire, on trouvera cette racine par la méthode précédente.

XLI.

Cas où la méthode précédente pourroit induire en erreur.

Mais si la quantité $A+B$, quoique dégagée de toute fraction, tant sous le signe radical, que hors de ce signe, devoit avoir une racine cube qui contînt des nombres fractionnaires, telle que la quantité $2+\sqrt{5}$, dont la racine cube est $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, la méthode précédente, aussi bien que celle de l'article XXXV, ne donneroit rien alors, et jetteroit dans l'erreur en faisant croire qu'il n'y auroit point de racine cube à espérer.

Moyens de s'en garantir

Pour remédier à cet inconvénient, il faut commencer par chercher directement quelles sont toutes les especes de racines fractionnaires dont les cubes pourroient être des nombres entiers.

Pour les trouver, soient représentées toutes ces racines par $\frac{p}{m}+\frac{q}{n}$ ; $p$ et $m$ étant supposés des nombres entiers qui n'ont aucun commun diviseur, $q$ la racine d'un nombre entier, qui ne permet aucune réduction avec le nombre $n$. En élevant cette quantité au cube, on aura $\frac{p^3}{m^3}+\frac{3pq^2}{n^2m}$ pour la partie rationelle; et... $\left(\frac{3p^2}{mn^2}+\frac{q^2}{n^3}\right)+q$ pour la partie incommensurable. De plus par les conditions du problême que nous cherchons à résoudre, tant la premiere quantité $\frac{p^3}{m^3}+\frac{3pq^2}{mn^2}$ que le coefficient $\frac{3p^2}{nm^2}+\frac{q^2}{n^3}$ de la seconde, doivent être des nombres entiers.

Soit d'abord égalé $\frac{3p^2}{m^2n}+\frac{q^2}{n^3}$ à $h$, que je suppose exprimer un nombre entier. On aura donc $q^2=hn^3-\frac{3p^2n^2}{m^2}$; mais cette quantite doit être un nombre entier par l'hypothese; donc $\frac{3p^2n^2}{m^2}$ doit être aussi un nombre entier; donc $\frac{3n^2}{m^2}$ doit l'être encore, et partant $n$ doit être un multiplie de $m$.

Cela posé, soit fait $n=ml$, on aura..... $q^2=am^3l^3-3p^2l^2$, mettant ces valeurs de $n$ et de $q^2$ dans $\frac{p^3}{m^3}+\frac{3pq^2}{mn^2}$, cette quantité deviendra après les réductions $-\frac{8p^3}{m^3}+\frac{3pq^2}{mn^3}+3phl$, qui doit être un nombre entier. Or $p$ et $m$ n'ayant aucun commun diviseur, cette quantité

tité ne sauroit être un nombre entier, que $m$ ne soit, ou 1, ou 2. Voilà donc $m$ fixé; quant à $n$, ou à $ml$, on voit bientôt qu'il doit être égal à $m$, parce que l'équation $q^2 = hm^3l^3 - 3p^2l^2$ donne $\frac{q}{l} = \sqrt{(hm^3l - 3p^2)}$ et partant $\frac{q}{ml}$, ou $\frac{q}{n} = \frac{1}{m}\sqrt{(hm^3l - 3p^2)}$, qui apprend que la seconde partie de la racine ne peut pas avoir d'autre dénominateur que la premiere, et que ce dénominateur, par conséquent, ne peut jamais être non plus que 2, ou 1.

Ainsi, lorsqu'on n'aura pas réussi à trouver, par la méthode précédente, la racine d'une quantité $A + B$, dont la partie rationnelle, ou commensurable $A$, et l'irrationnelle $B$ seront des nombres entiers, on n'aura qu'à multiplier cette quantité par 8, et chercher par la même méthode la racine cube de la nouvelle quantité qu'on aura par cette multiplication, et si on ne réussit pas, on sera sûr que la quantité proposée n'étoit pas cube; si on réussit, la moitié de la racine cube qu'on aura alors, sera celle qu'on cherchoit.

## XLII.

Lorsque le nombre $A$ et le radical $B$ seront fractionnaires, il est clair qu'il faudra, ainsi que dans l'article XXXIV, mettre $A$ et $B$ au même dénominateur, puis diviser la racine cube du numérateur par celle du dénominateur.

XLIII.

Ce qu'il faut faire quand la racine cube doit être la somme de deux radicaux.

Si l'on avoit à prendre la racine cube d'une quantité composée de deux radicaux du second degré, soit que cette quantité soit numérique, ou qu'elle soit littérale, il n'y auroit qu'à la multiplier par le cube de l'un des radicaux que contiendroit cette quantité. Le produit étant alors dans le cas des quantités qu'on vient de traiter, on en prendroit la racine cube de la même maniere, et on la diviseroit par le radical dont le cube auroit servi de multiplicateur à la proposée.

XLIV.

Comment on prend la racine quatrieme des quantités de même espece que les précedentes.

Lorsqu'on voudra prendre la racine quatrieme d'une quantité comme $A+B$, on n'aura d'abord qu'à en chercher la racine quarrée; car si on n'en trouve pas, à plus forte raison n'en trouvera-t-on pas de racine quatrième, ou quarrée quarrée. Si on en trouve une, il ne sera plus question que de trouver la racine quarrée de la quantité que la premiere extraction aura donnée.

XLV.

Ce qu'il faut faire toutes les fois que l'exposant de la racine est pair.

Il en sera de même toutes les fois qu'on aura une racine à prendre, dont l'exposant sera pair, il faudra commencer par la racine quarrée, et le Problême sera réduit à prendre une racine d'un exposant qui ne sera que la moitié du premier.

XLVI.

Si l'on vouloit la racine cinquieme d'une quantité $A+B$ telle que les précédentes, il faudroit suivre une méthode semblable à celle qu'on a suivie pour la racine cube. Au lieu des deux théorêmes, par lesquels on apprenoit que

Pour les racines cinquiemes.

$$p=\frac{\sqrt[3]{(A+B)}+\sqrt[3]{(A-B)}}{2},$$

et que $\sqrt[3]{(A^2-B^2)}=p^2-q^2$, on auroit ceux-ci.....

$$p=\frac{\sqrt[5]{(A+B)}+\sqrt[5]{(A-B)}}{2}$$

et $\sqrt[5]{(A^2-B^2)}=p^2-q^2$, dont on feroit le même usage que des précédents.

XLVII.

Il en seroit de même pour les racines plus élevées. Que $m$ soit l'exposant de la racine qu'on se propose de prendre de $A+B$, on aura ces deux théorêmes $p=\frac{\sqrt[m]{(A+B)}+\sqrt[m]{(A-B)}}{2}$ et.... $\sqrt[m]{(A^2-B^2)}=p^2-q^2$ qu'on emploiera encore de la même maniere que dans les racines cubes.

Pour démontrer ces théorêmes en général, il ne sera question que de faire voir que si $A+B$ est la puissance $m$ de $p+q$, $A-B$ sera celle de $p-q$; car il suivra de-là nécessairement que $\sqrt[m]{(A-B)}\times\sqrt[m]{(A+B)}$ sera.....

$(p+q)\times(p-q)$, ou $pp-qq$, et que..... $\frac{\sqrt[m]{(A+B)}+\sqrt[m]{(A-B)}}{2}$ sera $\frac{p+q+p-q}{2}$, ou $p$.

Quant à la démonstration de ce que $A-B$ est la puissance $m$ de $p-q$, lorsque $A+B$ est celle de $p+q$, elle seroit aisée à trouver si on vouloit y arriver par l'induction. Car, en donnant successivement différentes valeurs particulieres à $m$, et reconnoissant la vérité de ce théorême dans chaque cas particulier, on ne douteroit pas qu'il ne fût généralement vrai. Mais on ne sauroit se contenter d'une pareille maniere de démontrer, qu'au cas que l'on ne pût pas trouver une expression générale pour la puissance $m$ de $p+q$, et pour celle de $p-q$; il faut donc chercher cette expression générale, qui est bien propre d'ailleurs à exciter la curiosité de tous les Analystes.

## XLVIII.

De la maniere d'élever un binome à une puissance quelconque.

Pour parvenir à trouver la valeur générale de $(p+q)^m$, ou de $p+q$ multiplié par lui-même autant de fois moins une que l'unité est contenue dans $m$, commençons par chercher dans ce que nous avons vû précédemment, ce qui peut avoir du rapport avec cette opération. Reprenons dans cette vue ce que nous avons dit dans la IIIe. Partie, article II, où nous avons formé une équation par le produit de ses racines $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc. où nous

avons trouvé la loi suivant laquelle devoient être composés tous les termes de ce produit. Il est aisé de voir que tous ce que nous avons dit alors pourra s'appliquer au cas présent, en supposant que toutes les racines sont égales. Or, les réflexions données dans la III^eme Partie, article II, sur l'équation dont les racines sont $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc. consistoient en ceci.

1°. Que le premier terme de cette équation n'est autre chose que $x$ élevé à une puissance égale au nombre des racines.

2°. Que le second terme contenoit $x$ élevé à une puissance moindre d'une unité, avec un coefficient égal à la somme des racines.

3°. Que le troisieme terme étoit composé de $x$ élevé à une puissance moindre de deux unités, et avec un coefficient égal à la somme de tous les produits des racines prises deux à deux.

4°. Que le quatrieme terme renfermoit $x$ élevé à une puissance moindre de trois unités, avec un coefficient égal à la somme de tous les produits des racines prises trois à trois, et ainsi des autres termes.

Si on applique donc ces remarques dans le cas présent où toutes ces racines sont égales et où leur nombre est exprimé généralement par $m$, on verra

Que le premier sera $x^m$;

Que le second sera $x^{m-1}$ multiplié par $m\,a$, puisque toutes les racines sont égales à $a$, et que leur nombre est $m$;

Que le troisieme terme sera $x^{m-2}$ avec un coefficient égal à $a^2$, pris autant de fois qu'il y aura de produits $ab$, $ac$, $bc$, etc. dans le coefficient du troisieme terme de l'équation donnée par le produit des racines $x+a$, $x+b$, etc. dont le nombre est supposé $m$, puisque tous les produits $ab$, $ac$, $bc$, etc. doivent tous être égaux chacun à $a^2$ lorsque $b, c$, etc. sont égaux à $a$;

Que le quatrieme terme sera $x^{m-3}$ avec un coefficient égal à $a^3$ pris autant de fois qu'il y aura de produits $abc$, $abd$, $acd$, $bcd$, etc. dans le coefficient du quatrieme terme de l'équation, dont le nombre des racines $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc. est $m$, et ainsi des autres termes.

La question est donc réduite maintenant à savoir ce qu'un nombre de $m$ de lettres peut donner de produits $ab$, $ac$, $bc$, etc. prises deux à deux; de produits $abc$, $abd$, $bcd$, $acd$, etc. prises trois à trois; de produits $abcd$, $abde$, $abce$, $aedc$, $bcde$, etc. prises quatre à quatre, etc. Car, en supposant que ces nombres soient trouvés, et qu'on les exprime par $A$, $B$, $C$, $D$, etc. on aura $x^m+max^{m-1}+Aa^2x^{m-2}+Ba^3x^{m-3}+Ca^4x^{m-4}+Da^5x^{m-5}+$ etc. pour représenter la valeur cherchée de $(x+a)^m$.

Pour trouver, premièrement, ce qu'un nombre $m$ de lettre $a, b, c$, etc. peut donner de produits de deux lettres $ab$, $ac$, $bc$, etc. en les combinant de toutes les manieres possibles; commençons par remarquer que lorsqu'on aura formé tous ces produits, on aura écrit deux fois plus de lettres que de termes.

Remarquons ensuite que chacune des lettres $a, b, c$, etc. doit être répétée le même nombre de fois, et que chacune ne pouvant être multipliée que par toutes les autres, et non par elle-même, ne sauroit être répétée que $m-1$ de fois : donc le nombre de lettres à écrire, en formant tous ces produits, doit être $m \times (m-1)$; donc le nombre de tous ces produits doit être $\frac{m(m-1)}{2}$; et c'est-là la valeur de $A$, ou du coefficient du troisieme terme de la formule cherchée.

Quant au coefficient du quatrieme terme, c'est-à-dire, au nombre de produits à trois lettres $abc$, $abd$, $acd$, $bcd$, etc. que peuvent donner un nombre $m$ de lettres, $a, b, c, d$, etc. prises de toutes les manieres possibles trois à trois, pour le trouver, nous remarquerons d'abord que ce nombre doit être le tiers de celui des lettres qu'on écrit en formant tous ces produits.

Nous remarquerons ensuite que chacune de ces lettres doit être répétée le même nombre de fois, et que ce nombre doit être celui qui

exprime combien de produits de deux lettres doivent donner toutes les autres lettres ; car il est évident que chaque lettre, $a$, par exemple, doit être jointe à tous les produits $b\ c$, $bd$, $cd$, etc. des autres lettres prises deux à deux.

Le nombre de fois que chacune des lettres $a, b, c, d$, etc. doit être répétée, est donc celui qu'un nombre $m-1$ de lettres $b$, $c$, $d$, etc. donne de produits de deux lettres. Mais on vient de voir que, lorsque le nombre des lettres étoit $m$, le nombre de leurs produits deux à deux étoit la moitié du nombre $m$, multipliée par le nombre $m-1$, qui est moindre d'une unité. Donc, lorsque le nombre des lettres est $m-1$, il faut prendre la moitié $\frac{m-1}{2}$ de ce nombre, et la multiplier par $m-2$, qui est moindre d'une unité que $m-1$, c'est-à-dire que $\frac{(m-1).(m-2)}{2}$ est le nombre de fois que chacune des lettres $a, b, c$, etc. sera répétée dans tous les produits en question ; et comme le nombre de ces lettres est $m$, $\frac{m\ (m-1)\ (m-2)}{2}$ sera par conséquent le nombre de toutes les lettres écrites. Donc le nombre cherché des produits à trois lettres $abc$, $abd$, etc. sera $\frac{m\ (m-1)\ (m-2)}{2\times 3}$ ; et c'est la valeur de $B$, ou du coefficient du quatrieme terme.

A l'égard du coefficient $C$ du cinquieme, c'est-à-dire, du nombre de produits de quatre

lettres que doit donner le nombre $m$ de lettres, on trouvera de même qu'il doit être $\frac{m\ (m-1)\ (m-2)\ (m-3)}{2\times3\times4}$ parce que ce nombre doit être le quart de toutes les lettres écrites dans ces produits; que chacune de ces lettres doit être répétée le même nombre de fois, et combinée avec tous les produits de trois lettres que donne le nombre $m-1$ de lettres; et qu'enfin ces produits de trois lettres donnés par le nombre $m-1$ de lettres, doit être $\frac{(m-1)\ (m-2)\ (m-3)}{2\times3}$, par la même raison que... $\frac{m\ (m-1)\ (m-2)}{2\times3}$ est celui des produits de trois lettres que fournit le nombre $m$ de lettres.

Formant de même tous les autres coefficiens, et substituant ensuite dans la formule précédente à la place de $A, B, C, D, E$, etc. leurs valeurs ainsi trouvées, on aura enfin $x^m + max^{m-1} + m\times\frac{(m-1)}{2}a^2x^{m-2} + \frac{m\ (m-1)\ (m-2)}{2\times3}a^3x^{m-3}\ldots\ldots + \frac{m\ (m-1)\ (m-2)\ (m-3)}{2\times3\times4}a^4x^{m-4}\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{m\ (m-1)\ (m-2)\ (m-3)\ (m-4)}{2\times3\times4\times5}a^5x^{m-5} +$ etc. pour la puissance $m$ de $x+a$.

Par la même raison, la valeur de $(p+q)^m$, dont on avoit besoin article XLVII, sera... $p^m + mqp^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}q^2p^{m-2}\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\times3}q^3p^{m-3} +$ etc.

Formule générale pour l'élevation de $p+q$ à la puissance $m$.

XLIX.

Quant à celle de $(p-q)^m$, il est évident que

pour la trouver, il suffira de faire $q$ négatif dans cette formule ; ce qui la changera en

$$p^m - mqp^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}q^2p^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2\times 3}q^3p^{m-3} + \text{ etc.}$$

L.

Démonstration du théorême de l'art. XLVII.

Si on veut présentement démontrer le théorême de l'article XLVII, on commencera par remarquer que $A$ est la somme de tous les termes $p^m$, $\frac{m(m-1)}{2}qp^{m-2}$, $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\times 3\times 4}q^4p^{m-4}$, etc. dans lesquels il n'entre aucune puissance impaire de $q$, et que $B$ est la somme de tous les termes .....

$$mqp^{m-1}, \frac{m(m-1)(m-2)}{2\times 3}q^3p^{m-3}, \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2\times 3\times 4\times 5}q^5p^{m-5},$$

où $q$ ne se trouve jamais qu'à une puissance impaire.

On verra ensuite que $A+B$ est la premiere formule, et $A-B$ la seconde, ce qui étoit le point ou la difficulté étoit réduite, article XLVII.

LI.

Application de la formule précédente à un exemple.

Lorsqu'on voudra employer la formule précédente pour élever un binome quelconque à une puissance donnée, rien ne sera plus facile ; on n'aura qu'à substituer dans la valeur précédente de $(p+q)^m$ à la place de $p$ le premier terme du binome donné, à la place de $q$ le se-

cond et à la place de $m$ l'exposant de la puissance à laquelle on veut élever le binome proposé. Qu'on propose, par exemple, d'élever $3ac-2bd$ à la cinquieme puissance; je fais

$$3ac=p,\ -2bd=q,\ 5=m,$$

et j'ai d'abord $p^m=(3ac)^5=243a^5c^5.$

$$mqp^{m-1}=5\times(-2bd)(3ac)^4=-810a^4bc^4d.$$

$$\frac{m(m-1)}{2}q^2p^{m-2}=104bbdd(3ac)^3$$
$$=1080a^3bbc^3dd.$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2\times3}q^3p^{m-3}=10(-2bd)^3$$
$$(3ac)^2=-720a^2b^3c^2d^3.$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\times3\times4}q^4p^{m-4}=$$
$$5(-2bd)^4(3ac)=240ab^4cd^4.$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2\times3\times4\times5}q^5p^{m-5}=$$
$$1\times(-2bd)^5(3ac)^0=-32b^5d^5.$$

A l'égard des autres termes, leurs coefficiens ayant tous pour un de leurs produisans $m-5$, qui est zéro par la supposition que $m=5$, ils doivent toujours être nuls; ainsi $(3ac-2bc)^5$ aura pour valeur

$$243a^5c^5-8010a^4bc^4d+1080a^3b^2c^3d^2$$
$$-720a^2b^3c^2d^3+240ab^4cd^4-32b^5d^5.$$

## LII.

Lorsqu'on voudra élever à une puissance donnée une quantité composée de plus de deux

Comment on applique la formule précédente aux quantités de plus de deux termes.

termes, on le pourra encore facilement par la même méthode. Qu'il s'agisse, par exemple, d'un trinome, en nommant $p$ le premier terme de ce trinome, $q$ la somme des deux autres, la difficulté de l'élévation du trinome sera réduite à celle du binome, puisque chacun des termes $mp^{m-1}q$, $\frac{m(m-1)}{2}p^{m-2}q^2$, etc. ne renfermera pas de quantité à élever plus composée que des binomes.

Et lorsqu'on aura un polynome plus composé, on réduira toujours la difficulté à l'élévation d'un polynome plus simple.

LIII.

Pour donner un exemple de la maniere dont on emploie la formule précédente à l'élévation d'une quantité qui a plus de deux termes, soit proposé d'élever $a+2b-c$ à la quatrieme puissance. On fera $m=4$, $p=a$, $q=2b-c$; et substituant ces valeurs dans la formule, on aura.....

$$p^m=a^4,\ mqp^{m-1}=4(2b-c)a^3=8a^3b-4a^3c,$$

$$\frac{m(m-1)}{2}q^2p^{m-2}=6(2b-c)^2a^2=24a^2b^2-24a^2bc+6a^2c^2,$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2\times3}q^3p^{m-3}=4(2b-c)^3a=32ab^3-48abbc+24abcc-4ac^3,$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\times3\times4}q^4p^{m-4}=(2b-c)^4=16b^4-4(2b)^3c+\frac{4\times3}{2}(2b)^2c^2$$

$$-\frac{4\times3\times2}{2\times3}\times 2b\times c^3+\frac{4\times3\times2\times1}{2\times3\times4}c^4=$$
$$16b^4-32b^3c+24bbcc-8bc^3+c^4,$$

et partant $(a+2b-c)^4=a^4+8a^3b-4a^3c$
$+24a^2b^2-24a^2bc+6a^2c^2+32ab^3-48abbc,$
$+24abcc-4ac^3+16b^4-32b^3c+24bbcc$
$-8bc^3+c^4.$

## LIV.

Après avoir trouvé la formule précédente, on ne pouvoit gueres tarder à soupçonner qu'elle devoit s'étendre à d'autres puissances que celles qui sont des nombres entiers et positifs. Il suffiroit d'avoir reconnu qu'il y avoit d'autres puissances que celles-là pour vouloir y appliquer cette formule. Ayant reconnu, par exemple, qu'au lieu de $\sqrt[n]{a}$, on pouvoit écrire $a^{\frac{1}{n}}$; on aura imaginé aussitôt que lorsqu'il étoit question de prendre la racine $n$ d'une quantité complexe quelconque représentée par $p+q$, on n'avoit qu'à faire $m=\frac{1}{n}$ dans la formule précédente, ou, ce qui revient au même, on aura pensé que.....

$$p^{\frac{1}{n}}+\tfrac{1}{n}p^{\frac{1}{n}-1}q+\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2}p^{\frac{1}{n}-2}q^2+\text{etc.}$$

devoit exprimer $(p+q)^{\frac{1}{n}}$, ou la racine $n$ de $p+q$.

De même on aura soupçonné qu'au lieu de $\frac{1}{(p+q)^n}$ ou de $(p+q)^{-n}$, on n'avoit qu'à faire $m=-n$ dans la même valeur de $(p+q)$, ce qui donnoit.....

$$p^{-n} - np^{-n-1}q - \frac{n(-n-1)}{2}p^{-n-2}q^2 - \text{etc.}$$

En un mot, l'ordre et la généralité qu'on avoit toujours trouvé dans les opérations analytiques, devoient faire penser que, quoique la formule précédente n'eût été d'abord trouvée qu'en supposant $m$ entier et positif, elle pouvoit aussi s'appliquer à toutes autres valeurs de $m$. Mais, si la vraisemblance de cette généralité devoit frapper tous les géometres, elle ne pouvoit pas seule les contenter. L'effet principal qu'elle devoit produire sur leur esprit, étoit de les engager à chercher une démonstration rigoureuse. Voici une maniere de trouver cette démonstration, qu'il n'étoit pas bien difficile d'imaginer.

Où l'on fait voir que la formule précédente a lieu encore lorsque l'exposant est fractionnaire.

Soit proposé premiérement de faire voir que la formule en question peut s'appliquer toutes les fois que $m$ est une fraction quelconque positive; ou, ce qui revient au même, soit proposé de trouver l'équation $A$ (Voyez la table I ci-jointe) laquelle devient l'équation $B$, en divisant les deux membres par $p^{\frac{r}{n}}$ et en faisant $\frac{q}{p}=z$.

Mais, pour prouver l'équation $B$, il suffit

de faire voir qu'en élevant ses deux membres à la même puissance $n$, il viendra des quantités égales, c'est-à-dire, (en faisant....

$$s=\frac{r}{n}z+\frac{\frac{r}{n}\left(\frac{r}{n}-1\right)}{2}z^2+\frac{\frac{r}{n}\left(\frac{r}{n}-1\right)\left(\frac{r}{n}-2\right)}{2\times 3}z^3+\text{etc.})$$

qu'il s'agit de prouver l'équation $D$.

Or, comme $r$ et $n$ sont deux nombres entiers, on peut faire les élévations indiquées dans cette équation, par le moyen de la valeur générale de $(p+q)^m$; ce qui donnera l'équation $E$.

Le problême étant réduit à prouver l'équation $E$, il faut trouver par la valeur de $s$, celles de $s^2$, $s^3$, $s^4$, etc. multiplier ensuite la valeur de $s$ par $n$, celle de $s^2$ par $\frac{n(n-1)}{2}$, celle de $s^3$ par $\frac{n(n-1)(n-2)}{2\times 3}$, celle de $s^4$ par..... $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\times 3\times 4}$, etc.

afin d'avoir des valeurs de tous les termes du second membre de l'équation $E$. Ces valeurs trouvées et écrites les unes sous les autres, on formera l'équation $F$, laquelle, en faisant les réductions que demande le second membre, devient l'équation G, qui est la même que l'équation $E$. Donc l'équation $A$, qui avoit donné cette équation, est prouvée. Donc il est vrai, en général, que la formule de l'ar-

ticle XLVIII s'applique aussi bien aux puissances fractionnaires quelconques positives, qu'aux puissances entieres positives.

I. V.

La même formule va encore aux puissances négatives.

Pour faire voir présentement que la même formule s'applique également aux puissances négatives, soit entieres, soit fractionnaires, il s'agit de prouver (Voyez la table 2 ci-jointe) l'équation $A$, dont le second membre est celui que donne la formule de l'article XLVIII, en faisant $m=-\frac{r}{n}$.

Il est évident qu'au lieu de prouver l'équation $A$, on peut se contenter de prouver l'équation $B$, qui revient au même que la premiere, en faisant $z=\frac{q}{p}$, et multipliant les deux membres par $p^{\frac{r}{n}}$.

Il est évident, de plus, qu'au lieu de la quantité $(1+z)^{-\frac{r}{n}}$, on peut écrire $\frac{1}{(1+z)^{\frac{r}{n}}}$, et par conséquent l'équation $B$ devient l'équation $C$. Mais, comme dans le premier membre de cette équation, on peut substituer à $(1+z)^{\frac{r}{n}}$ sa valeur tirée de la formule de l'article LIV, il est clair qu'il suffit de prouver l'équation $D$. Or, pour prouver cette équation, il suffit de multiplier le second membre

membre par le dénominateur du premier, et de s'assurer que le produit qui en vient est l'unité numérateur du premier membre. C'est ce qui arrive en effet; car, faisant la multiplication, il vient pour produit la quantité E, dont le premier terme, qui est l'unité, est le seul qui reste après la réduction. Ainsi on est assuré présentement, par une démonstration, que la formule de l'article XLVIII a toute la généralité qu'on ne faisoit d'abord que lui soupçonner.

LVI.

Quelqu'assuré qu'on soit d'une vérité par une démonstration générale, on ne sauroit guères se défendre de chercher à la voir confirmée dans quelqu'application particuliere. Sachant, par exemple, que la formule précédente donne l'élévation des quantités quelconques à des puissances fractionnaires, il est naturel qu'on veuille l'appliquer à quelque quantité qu'on sache avoir exactement une racine ou puissance fractionnaire.

Exemple d'une racine quarrée prise par la formule de l'élévation des puissances.

Soit, par exemple, la quantité $1 + 2b + b^2$, dont on cherche la puissance $\frac{1}{2}$; ou, ce qui revient au même, la racine quarrée. Ayant fait $p = 1$, $q = 2b + b^2$, et $m = \frac{1}{2}$ dans la formule précédente, on trouvera..

Le premier terme..... $p^m = 1$.

Le second..... $m\, p^{m-1}\, q = b + \frac{1}{2} b^2$.

Le troisieme $\frac{m(m-1)}{2} p^{m-2} q^2 = -\frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} b^3 - \frac{1}{8} b^4$.

Le quatrieme $\frac{m(m-1)(m-2)}{2\times 3}p^{m-3}q^3 = \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}b^4 + \frac{3}{8}b^5 + \frac{1}{16}b^6$.

Le cinquieme $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\times 3\times 4}p^{m-4}q^4 = -\frac{5}{8}b^4 - \frac{5}{4}b^5 - \frac{15}{16}b^6 - \frac{5}{16}q^7 - \frac{5}{128}b^8$.

Le sixieme, etc.

et c'est la somme de tous ces termes qui doit être la racine cherchée.

A l'inspection de cette quantité, on a de la peine à croire qu'elle puisse se réduire à $1+b$ qu'on sait être la racine cherchée. Mais la généralité de la démonstration précédente, et une certaine expérience du calcul, assurent bientôt de cette réduction.

En ajoutant tous ces termes, on remarque que le premier terme 1 reste tout entier; que le second $b+\frac{1}{2}b^2$ se réduit à $b$, parce que la partie $\frac{1}{2}b^2$ de ce second terme est détruite par la même quantité contenue négativement dans le troisieme terme $-\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}b^3 - \frac{1}{8}b^4$; que ce qui reste du troisieme terme $-\frac{1}{2}b^3 - \frac{1}{8}b^4$, après la destruction de $\frac{1}{2}b^2$, est entièrement détruit aussi par le quatrieme $\frac{1}{2}b^3 + \frac{3}{4}b^4 + \frac{3}{8}b^5 + \frac{1}{16}b^6$ dont il ne reste plus alors que $\frac{5}{8}b^4 + \frac{3}{8}b^5 + \frac{1}{16}b^6$. Ce reste du quatrieme terme se trouve détruit de même par le cinquieme terme; et en poussant les réductions plus loin, on voit que tout s'évanouit dans la quantité précédente, excepté $1+b$, ainsi que cela devoit arriver.

$$-1\,q+\frac{\frac{r}{n}\cdot\left(\frac{r}{n}+1\right)}{2}p^{-\frac{r}{n}}\cdot\left(\frac{r}{n}+3\right)p^{-\frac{r}{n}-4}q^{4}-\text{etc.}$$

$$\frac{\left(\frac{r}{n}+1\right)}{2}z^{2}-\frac{\frac{r}{n}\cdot\left(\frac{r}{n}+\right.}{}$$

$$\frac{\cdot\left(\frac{r}{n}+1\right)}{2}z^{2}-\frac{\frac{r}{n}\cdot\left(\frac{r}{n}\right.}{}\ \text{etc.}$$

$$1$$

$$z^{2}+\frac{\frac{r}{n}\cdot\left(\frac{r}{n}-1\right)\cdot(}{2\,.\,3}\text{c.}$$

$$z^{2}-\frac{\frac{r}{n}\cdot\left(\frac{r}{n}+1\right)\cdot\left(\frac{r}{n}\right.}{2\,.\,3}$$

$$-\frac{\frac{r}{n}\cdot\left(\frac{r}{n}+1\right)\cdot\left(\frac{r}{n}\right.}{2\,.\,3}$$

$$^{2}+\frac{\frac{r}{n}\cdot\frac{r}{n}\cdot\left(\frac{r}{n}\right.}{2}$$

$$-z^{2}-\frac{\frac{r}{n}\cdot\frac{r}{n}\cdot\left(\frac{r}{n}\right.}{2}$$

$$+\frac{\frac{r}{n}\cdot\left(\frac{r}{n}-1\right)\cdot(}{2\,.\,3}$$

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

$$-1\ q + \frac{\frac{r}{n}\cdot\left(\frac{r}{n}-1\right)}{2} p^{\frac{r}{n}} \cdot \left(\frac{r}{n}-3\right) p^{\frac{r}{n}-4} q^4 + \text{etc.}$$

$$\cdot\left(\frac{r}{n}-1\right) z^2 + \frac{\frac{r}{n}\cdot\left(\frac{r}{n}\right.}{}$$

$$\frac{\frac{r}{n}\cdot\left(\frac{r}{n}-1\right)}{2} z^2 + \frac{\frac{r}{n}\cdot}{} + \text{etc.} \Big\}^n$$

$$1\Big) z^2 + \frac{\frac{r}{n}\cdot\left(\frac{r}{n}-1\right.}{2} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{r.(r-1).(r-2)}{2.3}$$

$$+ \frac{n.(n-1).(n-2)}{2.3}$$

$$\cdot \quad s^3 \quad -3)\ s^4 \Bigg\} = \Bigg\{ \begin{array}{l} 1 \\ + n\cdot\frac{r}{n} z + \frac{\left(\frac{r}{n}-2\right)\cdot\left(\frac{r}{n}-3\right)}{\cdot 3\cdot 4} z^4 + \text{etc.} \\ + \left(\frac{r}{n}-1\right)\cdot\frac{\left(\frac{7r}{n}-11\right)}{12} z^4 + \text{etc.} \\ 2)\cdot\frac{3r^3}{2n^3}\cdot\left(\frac{r}{n}-1\right) z^4 + \text{etc.} \\ 2).(n-3)\cdot\frac{r^4}{n^4} z^4 + \text{etc.} \\ \qquad + \text{etc.} \end{array}$$

$$^2 + \frac{n.(n-1).(n-}{2.3}$$

$$^2 + \frac{r.(r-1).(r-}{2.3}$$

LVII.

Outre que cet exemple et tous ceux de même nature, qu'il est aisé de former, confirment, pour ainsi dire, par expérience, la proposition démontrée, article LI, ils montrent en même temps une utilité réelle de cette proposition; puisqu'il en résulte une méthode pour extraire les racines de toutes les quantités qui sont des puissances complettes. Mais ce n'est pas là le seul avantage qu'on en puisse retirer. Lorsque la quantité proposée n'aura point de racine exacte, on en pourra trouver une approchée par la formule précédente.

Lorsque les quantités n'ont point de racines exactes, on en trouve d'approchées par la méthode précédente.

Qu'on cherche, par exemple, la racine cinquieme de la quantité $a+b$. En substituant la plus grande des deux parties de cette quantité qu'on suppose être $a$ à la place de $p$, la plus petite $b$ à la place de $q$, et $\frac{1}{5}$ à la place de $m$, on aura pour la racine cherchée.....

Exemple.

$$a^{\frac{1}{5}}+\tfrac{1}{5}a^{\frac{-4}{5}}b-\frac{1\times 4}{2\times 25}a^{\frac{-9}{5}}b^2+\frac{1\times 4\times 9}{2\times 3\times 125}a^{\frac{-14}{5}}b3$$

$$-\frac{1\times 4\times 9\times 14}{2\times 3\times 4\times 625}a^{\frac{-19}{5}}b4+\frac{1\times 4\times 9\times 14\times 19\,a^{\frac{-24}{5}}b^5}{2\times 3\times 4\times 5\times 3125}-\text{etc.}$$

$$\text{ou } a^{\frac{1}{5}}\times\left(1+\frac{b}{5a}-\frac{2bb}{25aa}+\frac{6b^3}{125a^3}-\frac{21b^4}{625a^4}+\text{etc.}\right)$$

Or, quoiqu'il fallût former de la même manière une infinité de termes; pour que la quantité précédente, qui est de celles qu'on appelle suites ou séries infinies, exprimât exactement la racine cherchée, il est

Ce que c'est qu'une série ou suite infinie.

certain néanmoins qu'en se contentant de prendre un grand nombre de ces termes, on approche extrêmement de la valeur de la racine cherchée. S'il arrive même que $a$ soit considérablement plus grand que $b$, on n'a besoin que de peu de termes pour approcher sensiblement de la vraie racine.

Qu'on suppose, par exemple, $b=\frac{1}{10}a$, on aura pour les six premiers termes de la suite précédente .....

$$a^{\frac{1}{5}}\left(1+\frac{1}{50}-\frac{2}{2500}+\frac{3}{62500}-\frac{21}{6250000}+\frac{399}{156250000}\right).$$

Or, si l'on fait attention à la considérable diminution successive de ces six termes, on voit que ceux qu'on pourroit y joindre, seroient si petits, qu'ils ne valent pas la peine d'être cherchés.

## LVIII.

Toutes sortes de quantités peuvent être réduites en séries par la formule précédente.

L'utilité de la formule des puissances ne se borne pas encore à trouver par approximation toutes sortes de puissances fractionnaires ou négatives; elle est infiniment plus étendue en servant à réduire en séries toutes sortes de quantités où il entre tant de signes radicaux, diviseurs, etc. qu'on voudra. Qu'on ait, par exemple, la quantité $\frac{\sqrt[4]{(\sqrt[3]{(a+b)}+\sqrt[3]{(a-b)})}}{\sqrt[5]{(a+b)}-\sqrt[5]{(a-b)}}$, en réduisant d'abord les deux quantités $\sqrt[3]{(a+b)}$ et $\sqrt[3]{(a-b)}$ en séries, et les ajoutant, puis enélevant la série qui en est la somme à la puis-

sance $\frac{1}{4}$, on formera une nouvelle série, qui, étant multipliée ensuite par celle qu'on trouveroit de même pour $\frac{1}{\sqrt[5]{(a+b)}-\sqrt[5]{(a-b)}}$ ou $(\sqrt[5]{(a+b)}-\sqrt[5]{(a-b)})^{-1}$, donneroit enfin une seule série pour exprimer la quantité p oposée. Or, indépendamment de l'avantage d'avoir par approximation toutes les quantités composées de radicaux et de diviseurs complexes, il y a une infinité de cas où il est très-utile, pour des démonstrations, que les quantités à traiter, soient délivrées de radicaux et diviseurs complexes, ainsi qu'elles le sont par leurs transformations en séries. Mais il est tems de retourner à la résolution des équations.

# ÉLÉMENS D'ALGEBRE.

## CINQUIEME PARTIE.

*Résolution des équations du troisieme et du quatrieme degré.*

LOrsqu'on a voulu passer des équations exprimées généralement par $ax^m=b$ et $ax^{2m}+bx^m=c$, à celles qui contenoient, outre ces termes, les intermédiaires, on a bientôt senti des difficultés qui ont fait abandonner l'espérance de résoudre ces équations en général. On n'a pu parvenir jusqu'à présent qu'à la solution de celles du troisieme et du quatrieme degré, encore la méthode qu'on a trouvée pour les résoudre, souffre-t-elle une exception considérable : voici le chemin qu'on a dû suivre en découvrant cette méthode.

I.

Equation la plus composée du troisieme degré.

Soient représentées par l'équation $y^3+dy^2+ey+f=0$, toutes celles du troisieme degré. Si on pouvoit réduire cette équation à une autre, qui n'eut que le premier et le dernier terme, il est évident que ce seroit l'avoir ré-

solue. Or, le moyen le plus naturel de transformer une équation en une autre, dans laquelle on soit libre de faire quelques changemens, c'est de substituer dans cette équation, à la place de l'inconnue, quelque quantité, dans laquelle on laisse une lettre indéterminée, afin de pouvoir s'en servir à volonté.

III.

Soit donc substitué dans cette équation $x+r$ au lieu de $y$, il viendra $x+(3r+d)xx+(3rr+2dr+e)x+r^3+dr^2+er+f=0$, que l'on écrit aussi de cette maniere:

Transformation par laquelle on fait évanouir un terme quelconque de cette équation.

$$\begin{array}{rrrr} x^3 & +3rx^2 & +3rrx & +r^3=0 \\ & +d & +2dr & +dr^2 \\ & & +e & +er \\ & & & +f \end{array}$$

Comme on est le maître de $r$ dans cette équation, il est aisé de voir qu'on peut par son moyen faire évanouir celui des termes qu'on voudra, mais aussi on n'en sauroit faire disparoître qu'un à la fois.

Qu'on fasse, par exemple, $3r+d=0$, ou $r=-\frac{1}{3}d$, le second terme s'évanouira, et l'équation deviendra.....

$$\begin{array}{rrrr} x^3 & +ex & +\frac{2}{27}d^3=0 \\ & -\frac{d^2}{3} & -\frac{de}{3} & \\ & & +f & \end{array}$$

Si on fait, au contraire, $3rr+2dr+e=0$, ou $r=-\frac{1}{3}d\pm\sqrt{(-\frac{e}{3}+\frac{1}{3}dd)}$, le troisieme terme s'évanouira, mais les deux autres resteront.

Si on vouloit faire évanouir le dernier terme, il faudroit faire $r^3+dr^2+er+f=0$; et alors pour avoir $r$, il faudroit résoudre une équation pareille à la proposée.

Avec un peu de connoissance du calcul, on devoit bien s'attendre que la substitution de $x+r$ à la place de $y$ ne pouvoit pas faire évanouir plusieurs termes à la fois, parce que l'introduction d'une inconnue ne peut servir qu'à résoudre une seule équation; ou, ce qui revient au même, à remplir une condition: or, l'évanouissement de chaque terme fait une condition. Mais si, par cette transformation, on n'est pas parvenu entiérement au but qu'on avoit eu de réduire l'équation proposée à deux termes, on a du moins changé la question en une nouvelle qui paroît plus simple, puisqu'il ne s'agit plus que d'une équation à trois termes.

Des deux équations transformées qu'on peut avoir en faisant évanouir, ou le premier, ou le second terme; la premiere, c'est-à-dire,

$$x^3+ex+\tfrac{2}{27}d^3=0$$
$$-\tfrac{d^2}{3}\quad-\tfrac{de}{3}$$
$$+f$$

est la plus simple; aussi est-ce celle que nous allons chercher à résoudre, en tâchant de diminuer encore le nombre de ses termes: mais nous suspendrons un moment cette recherche, parce que la méthode qu'on vient d'employer pour transformer les équations du troisieme

degré, offre si naturellement de nouvelles vérités sur les équations de tous les autres degrés, qu'il est à propos de s'y arrêter un peu.

III.

On voit d'abord qu'à l'aide de la même transformation de $y$ en $x+r$, on peut aussi faire évanouir le terme qu'on voudra d'une équation d'un degré quelconque.

Qu'on ait, par exemple, l'équation du quatrieme degré la plus générale $y^4+ay^3+by^2+cy+d=0$, en y substituant $x+r$ au lieu de $y$, on aura

Transformation précédente appliquée à une équation du quatrieme degré.

$$\begin{array}{rrrrr} x^4 & +4rx^3 & +6r^2x^2 & +4r^3x & +r^4=0 \\ & +a & +3ar & +3ar^2 & +ar^3 \\ & & +b & +2br & +br^2 \\ & & & +c & +cr \\ & & & & +d \end{array}$$

dans laquelle faisant $4r+a=0$, ou $r=-\frac{1}{4}a$, on aura une équation du quatrieme degré qui n'aura point de second terme.

De même, en déterminant $r$ par l'équation du second degré $6r^2+3ar+b=0$, on aura une équation du quatrieme degré qui n'aura point de troisieme terme. Et, en faisant $r$ tel qu'il conviendroit pour résoudre l'équation du troisieme degré $4r^3+3ar^2+2br+c=0$, on auroit une équation du quatrieme degré qui n'auroit point de quatrieme terme. Le cinquieme s'en iroit de même par le moyen d'une équation du quatrieme degré. Mais on ne

s'arrête pas ordinairement à faire évanouir d'autres termes que le second, parce que l'évanouissement des autres termes amene presque toujours des calculs compliqués de radicaux et fort pénibles.

IV.

Evanouissement du second terme dans une équation du cinq. degré.

Dans une équation générale du cinquieme degré $y^5+ay^4+by^3+cy^2+dy+e=0$, la transformée $y=x+r$ donne l'équation..... $x^5+5rx^4+$, etc. dont le second terme.... $+a$ s'évanouira par l'équation du premier degré... $5r+a=0$, ou $r=-\frac{1}{5}a$.

V.

Dans une équation du degré quelconque $m$.

Et, en général, dans une équation d'un degré quelconque $m$, représentée par $x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+$ etc. $=0$, il sera aisé de trouver par la formule des puissances, donnée dans la quatrieme partie, article XLVIII, que le second terme s'évanouira en faisant l'inconnue..... $x=y-\frac{a}{m}$.

VI.

Résolution de l'équation générale $x^3+px+q=0$.

Après cette petite digression, remettons-nous à chercher la solution de l'équation du troisieme degré.....

$$x^3+cx+\tfrac{2}{27}d^3=0$$
$$-\frac{d^2}{3}\qquad\frac{de}{3}$$
$$+\quad f$$

à laquelle l'équation générale $y^3+dy^2+ey+f=0$ s'étoit réduite par la supposition de

$y=x-\frac{1}{3}d$; et pour abréger les calculs, écrivons-la ainsi, $x^3+px+q=0$.

En suivant l'idée que nous avons déjà employée, faisons encore une transformée. Substituons, par exemple, $u+z$ à la place de $x$; non dans la vue de faire évanouir un terme de cette équation, ainsi qu'on se l'étoit proposé la premiere fois; car on verroit bientôt que le terme qui avoit disparu reviendroit; mais pour décomposer cette équation en d'autres qui soient plus simples. Sans voir distinctement qu'un tel moyen doit réussir, on sent bien que la transformation d'une équation en une autre, où l'on a une lettre à déterminer à volonté, ne peut gueres manquer d'être utile.

La substitution de $x=u+z$ étant faite, il vient $u^3+3uuz+3uzz+z^3+pu+pz+q=0$. Supposons maintenant que l'une des inconnues $u$ ou $z$ soit telle que $u^3+z^3+q=0$; on aura, dans ce cas, l'équation $3u^2z+3uz^2+pu+pz=0$, qui, étant divisée par $u+z$, donne $3uz+p=0$, ou $u=-\frac{p}{3z}$. Voilà donc une équation avec laquelle on chassera facilement une des inconnues introduites; il ne s'agit plus que de savoir quelle sera l'équation qui déterminera l'autre inconnue. Pour cela, il faut remettre cette valeur de $u$ dans la premiere équation $u^3+z^3+q=0$; ce qui donnera $-\frac{p^3}{27z^3}+z^3+q=0$, ou $z^6+qz^3=\frac{p^3}{27}$.

Or, cette équation, quoique d'un degré plus haut que la proposée, est cependant bien plus facile à résoudre; car elle est de la classe de celles que nous avons résolues dans la quatrieme partie, article XX, et la valeur qu'elle donne pour $z$ est $\sqrt{(-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)})}$. Donc $u$ ou $-\frac{p}{3z}$ sera $\frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)})}}$ qui se réduit facilement à $-\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)})}$; car on peut voir facilement que le produit de

$$-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)}$$

par $+\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}+\frac{1}{27}p^3)}$ est $\frac{1}{27}p^3$, et partant que $\frac{1}{3}p$. est le produit des racines cubes de ces quantités. Ajoutons présentement ces valeurs de $u$ et de $z$, et nous aurons $u+z$, ou

$$x=\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)})}$$
$$-\sqrt[3]{(+\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)})},$$

ou simplement.....

$$x=\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)})}$$
$$-\sqrt[3]{(+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)})},$$

car en prenant le radical $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$ en —, on n'a pas une valeur de $x$ différente de celle qu'on a en le prenant en +.

## VII.

La formule précédente ne donne qu'une des trois racines.

Par cette valeur de $x$, on voit qu'il n'en est pas des équations du troisieme degré comme de celles du second, où la même expression d'une racine marquoit, à l'aide du signe $\pm$, les deux racines à la fois; ici on

trouve une expression qui ne sauroit désigner qu'une des trois valeurs de $x$.

Pour trouver les deux autres, il faut diviser l'équation $x^3+px+q=0$, par la racine que donne la valeur précédente de $x$, et l'équation du second degré qui en sera le quotient, donnera, par sa résolution, les deux autres racines cherchées. Maniere d'avoir les deux autres

Si l'on veut trouver la valeur générale de ces deux racines, il faut faire, pour abréger les calculs $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)})}=m$,

et $\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)})}=n$,

et faire attention que dans ce cas, $mn=\frac{1}{3}p$ et $m^3-n^3=q$. Cela posé, la division de l'équation $x^3+px+q=0$ par $x+m-n$, qui est alors la racine qu'on vient de trouver, donnera pour quotient $xx+nx-mx+mm+nn+mn=0$, dont les deux racines, c'est-à-dire celles qui nous restent à trouver dans l'équation... $x^3+px+q=0$, sont $x=\frac{m-n}{2}\pm\frac{1}{2}(m+n)\sqrt{-3}$,

ou
$$x=\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)})}$$
$$-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)})}$$
$$\pm\{\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2+\tfrac{1}{27}p^3)})}$$
$$+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)})}\}\sqrt{-3}$$

qui sont nécessairement imaginaires toutes les fois que $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$ est une quantité réelle. On auroit pu reconnoître dès l'article V de la quatrieme Partie, où il n'étoit question que

des équations à deux termes, l'espece d'imperfection que donne à la solution des équations du troisieme degré, la différence de forme des trois racines; mais cette espece d'imperfection est ici plus frappante, en se trouvant dans la solution générale.

## VIII.

Cas où la formule précédente ne sauroit faire connoître $x$, à cause des imaginaires qu'elle renferme.

Ce désavantage de la solution précédente des équations du troisieme degré n'en peut paroître un qu'à ceux qui considerent, pour ainsi dire, méthaphysiquement l'Algebre; mais il y en a un autre bien plus frappant pour tout le monde, et qui a extrêmement exercé tous les calculateurs. C'est que cette solution n'apprend rien du tout pour la valeur de $x$ toutes les fois que $\frac{1}{27}p^3$ est plus grand que $\frac{1}{4}qq$, et qu'il est en même tems négatif. Dans ce cas, qui est très-étendu, la valeur de la quantité $\sqrt{(\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}q^2)}$ est imaginaire, et par conséquent les deux quantités.....

$$\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)})}$$

et

$$-\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)})}$$

qui composent la valeur de $x$ sont imaginaires aussi: mais on n'en sauroit conclure pour cela que la valeur de $x$ soit imaginaire; ce qui, bien loin d'être regardé comme un vice de la solution, la rendroit une solution complette; et on ne sauroit non plus, du moins par les méthodes connues jusqu'à présent,

déterminer quelle est la quantité réelle qu'exprime cette valeur de $x$.

IX.

Non-seulement on ne sauroit conclure de l'expression que $x$ a dans ce cas, que la racine cherchée est imaginaire; mais on s'est assuré, par divers moyens, que cette valeur étoit toujours réelle alors : voici de tous ces moyens celui qui m'a paru le plus direct (1).

Soit repris la valeur.....

$$\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)})}$$
$$-\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)})}$$

On démontre cependant que dans ce cas $x$ est réel.

de $x$, et soit mis dans cette valeur à la place de $\frac{1}{2}q$, $a$, et à la place de $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$ supposé imaginaire, $b\sqrt{(-1)}$; on aura.....

$$x=\sqrt[3]{(-a+b\sqrt{(-1)})}-\sqrt[3]{(a+b\sqrt{(-1)})}.$$

Cherchons maintenant les valeurs de..... $\sqrt[3]{(-a+b\sqrt{(-1)})}$ et de $-\sqrt[3]{(a+b\sqrt{(-1)})}$ par la formule donnée dans la quatrieme partie, article XLVIII, pour l'élévation du binome.

La premiere de ces deux quantités deviendra $-a^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b\sqrt{(-1)}-\frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2$
$-\frac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}b3\sqrt{(-1)}+\frac{10}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4+$etc.

Et la seconde

(1) Je l'ai tiré d'un mémoire de M. NICOLE, membre de l'académie, année 1738, pages 99 et 100.

$$-a^{\frac{1}{3}}-\tfrac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b\sqrt{(-1)}-\tfrac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2$$
$$+\tfrac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}b^3\sqrt{(-1)}+\tfrac{10}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4- \text{ etc.}$$

et par conséquent la valeur de $x$ sera la suite infinie

$$-2a^{\frac{1}{3}}-\tfrac{2}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2+\tfrac{20}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4-\tfrac{308}{6561}a^{-\frac{17}{3}}b^6+ \text{ etc.}$$

ou $$-2a^{\frac{1}{3}}\left\{1+\frac{b^2}{9a^2}-\frac{10b^4}{243a^4}+\frac{154b^6}{6561a^6}-\text{etc.}\right\}$$

qui ne contient aucune racine imaginaire. Donc, dans le cas où $\frac{1}{27}p^3$ est négatif et plus grand que $\frac{1}{4}qq$, la valeur.....

$$\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{27}p^3+\tfrac{1}{4}q^2)})}$$
$$-\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{27}p^3+\tfrac{1}{4}q^2)})}$$

de $x$, qui est alors sous une forme imaginaire, est cependant une quantité toujours réelle. Malheureusement on n'a pu jusqu'à présent lui trouver une forme réelle, qu'en admettant, ainsi qu'on vient de faire, une infinité de termes dans son expression; ce qui ne peut servir qu'à prouver que cette valeur est réelle, mais non à la faire connoître exactement.

Par la même méthode on trouvera une valeur approchée de $x$.

X.

Si l'on veut se contenter d'une approximation, on pourra faire usage de la série précédente; car, en supposant $a$ plus grand que $b$, les termes de cette série iront en diminuant, et par conséquent on pourra négliger les

les derniers, quand ils seront parvenus à n'être que de très-petites quantités. S'il arrive, au contraire, que $a$ soit plus petit que $b$, il faudra, en employant la formule du binome pour trouver $\sqrt[3]{(-a+b\sqrt{(-1)})}$ et $\sqrt[3]{(a+b\sqrt{(-1)})}$ avoir l'attention de prendre $b\sqrt{(-1)}$ pour le premier terme du binome, et $a$ pour le second; on aura, pour la valeur de $x$ ou de.. $\sqrt[3]{(-a+b\sqrt{(-1)})}-\sqrt[3]{(a+b\sqrt{(-1)})}$, la quantité $+\frac{2}{3}b^{-\frac{2}{3}}a-\frac{10}{81}b^{-\frac{8}{3}}a^3+\frac{44}{729}b^{-\frac{14}{3}}a^5$

$$-\frac{748}{19683}b^{-\frac{20}{3}}a^7+\text{etc.}$$

ou $-\frac{2a}{3b^2}\left\{-1+\frac{5a^2}{27b^2}-\frac{22a^4}{243b^4}+\frac{374a^6}{6561b^6}-\text{etc.}\right\}$

qui est aussi réelle que l'autre expression, et dont tous les termes décroissent quand $a$ est plus petit que $b$.

## XI.

Nous avons vu, article VII, que des trois racines de l'équation $x^3+px+q=0$, celles qui sont exprimées par.....

Les deux autres valeurs de $x$ sont aussi réelles dans le même cas.

$$x=\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)})}$$
$$-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)})}$$
$$\pm\left\{\tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{2}p3)})}\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{2}\sqrt{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)})}\right\}\sqrt{-3}$$

sont toutes deux imaginaires, toutes les fois que $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$ étoit une quantité réelle; nous allons voir présentement que ces deux

racines sont toujours réelles, toutes les fois que $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$ est imaginaire, c'est-à-dire, toutes les fois que $p$ est négatif, et tel que $\frac{1}{27}p^3$ est plus grand que $\frac{1}{4}q^2$.

Car si on change, à l'aide des dénominations qu'on vient d'employer, l'expression de ces deux valeurs de $x$ en.....

$$\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{(a+b\sqrt{(-1)})}-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{(-a+b\sqrt{(-1)})}$$
$$\pm\{\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{(a+b\sqrt{(-1)})}+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{(-a+b\sqrt{-1})}\}\sqrt{-3}$$

et qu'on réduise, ainsi qu'on vient de faire, les quantités $\sqrt[3]{(-a+b\sqrt{(-1)}}$ et..... $\sqrt[3]{(a+b\sqrt{(-1)})}$ en séries, on aura, pour ces deux valeurs de $x$.....

$$a^{\frac{1}{3}}\times\left\{1+\frac{b^2}{9a^2}-\frac{10b^4}{243a^4}+\frac{154b^6}{6561a^6}+\text{etc.}\right\}$$
$$\pm\tfrac{1}{3}\frac{b\sqrt{3}}{a^{\frac{1}{3}}}\times\left\{1-\frac{5b^2}{27a^2}+\frac{22b^4}{243a^4}-\frac{374b^6}{6561a^6}+\text{etc.}\right\}$$

expression entiérement réelle.

## XII.

Comment des racines de l'équation $x^3+px+q=0$, on tire celles de l'équation $y^3+dy^2+ey+f=0$.

Comme l'équation la plus générale du troisieme degré, représentée par.....

$$y^3+dy^2+ey+f=0$$

s'est réduite à

$$x^3+ex+\tfrac{2}{27}d^3=0$$
$$-\frac{d^2}{3}\quad-\frac{de}{3}$$
$$+f$$

ou simplement $x^3+px+q=0$, par la supposition de $y=x-\frac{1}{3}d$, il s'ensuit que les valeurs de $y$ dans l'équation générale $y^3+dy^2$

$+ey+f=0$ sont celles qu'on a en résolvant cette derniere équation $x^3+px+q=0$, et en retranchant de ses trois racines $\frac{1}{3}d$.

XIII.

Une équation du troisieme degré a ses trois racines réelles, ou une réelle avec deux imaginaires.

De-là, il suit qu'une équation quelconque du troisieme degré, sera entiérement dans le même cas, par rapport aux racines réelles ou imaginaires, que l'équation qu'elle produit par l'évanouissement du second terme.

Ainsi on voit, en se rappellant les articles VII et IX, que toute équation du troisieme degré doit au moins avoir une racine réelle, et que les deux autres sont toujours, ou toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires.

XIV.

Comment on distingue ces cas.

Pour distinguer lequel de ces deux cas arrive dans une équation du troisieme degré donnée, on commencera par en faire évanouir le second terme, afin de la pouvoir comparer à l'équation $x^3+px+q=0$; et lorsque cette opération sera faite, si $p$ est positif, ou qu'étant négatif il soit tel que $\frac{1}{27}p^3$ ne soit pas plus grand que $\frac{1}{4}qq$, il n'y aura qu'une racine réelle, laquelle sera déterminée exactement par la formule de l'article VI.

Si, au contraire, $p$ est négatif et tel que $\frac{1}{27}p^3$ soit plus grand que $\frac{1}{4}qq$, les trois racines seront réelles; mais aucune d'elles ne pourra être déterminée par la formule de l'article VI, à moins qu'on ne se contente

d'une approximation comme celles qu'on a en transformant cette formule en une suite infinie.

## XV.

Quelles sont les racines, lorsque $\frac{1}{27}p^3$ est négatif et $=\frac{1}{4}qq$.

S'il arrivoit que $\frac{1}{27}p^3$ fut négatif et égal à $\frac{1}{4}qq$, on pourroit trouver de la difficulté à déterminer auquel des deux cas précédens l'équation se rapporteroit, c'est-à-dire, qu'on ne sauroit s'il devroit y avoir seulement une racine réelle, ou si toutes les trois le seroient, à cause que $\sqrt{(\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}q^2)}$, qui est alors zéro, peut également se compter parmi les quantités positives, ou parmi les négatives; mais l'inspection des trois racines ou valeurs d'$x$ trouvées précédemment, décide bientôt la question. Car la premiere valeur, exprimée par

$$\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)})} - \sqrt{(\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)})}$$

se réduit alors à $-2\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$, et les deux autres valeurs, exprimées généralement par.....

$$\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)})} - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)})} \pm \{\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)})} + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)})}\} \times \sqrt{-3}$$

se réduisent alors à $+\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q \pm 0)}$, c'est-à-dire, qu'elles sont toutes deux égales à $+\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$.

Ainsi, les équations où $\sqrt{(\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3)}$ est zéro, sont comptées parmi celles dans lesquelles les trois racines sont réelles.

## XVI.

Application des méthodes précédentes à un exemple.

Pour faire présentement quelques applications des regles précédentes, supposons d'abord qu'on ait l'équation $y^3+3yy-3y+25=0$ à résoudre; on commencera par faire évanouir le second terme de cette équation; ce qui se fera, suivant l'article II, en supposant $y=x-1$ et l'équation, délivrée du second terme, que l'on aura par cette substitution, sera $x^3-6x+30=0$, qui, étant comparée à $x^3+px+q=0$, donne $p=-6$, et $q=30$.

Ces valeurs étant substituées dans..... $\sqrt{(\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3)}$, cette quantité devient $\sqrt{217}$, qui est une quantité réelle; ainsi la formule de l'article VI doit donner, dans ce cas, la valeur cherchée de $x$.

Si l'on fait donc dans cette formule.....

$$\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)})}$$
$$-\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3)})}$$

les substitutions de 15 pour $\frac{1}{2}q$ et de $\sqrt{217}$ pour $\sqrt{(\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3)}$, cette valeur générale de $x$ devient $\sqrt[3]{(-15+\sqrt{217})}-\sqrt[3]{(15+\sqrt{217})}$, qui est la seule racine réelle que contienne l'équation $x^3-6x+30=0$, et qui ne sauroit être réduite à une plus simple expression. Substituant ensuite la valeur de $x$ dans l'équa-

tion $y=x-1$, on aura $y=\sqrt[3]{(-15+\sqrt{217})}-\sqrt[3]{(15+\sqrt{217})}-1$, pour la seule racine réelle de l'équation proposée..... $y^3+3yy-3y+25=0$.

## XVII.

Autre exemple contenant une équation du sixieme degré qui se réduit au troisieme.

Si on avoit une équation du sixieme degré, où l'inconnue ne se trouvât à aucune dimension impaire, il est évident qu'on la résoudroit par la même méthode que la précédente, puisque cette équation se réduiroit tout de suite au troisieme degré par une transformation. Qu'on ait, par exemple..... $z^6+9z^4+39zz+55=0$; en regardant $zz$ égal à une nouvelle inconnue $x$ moins un tiers du coefficient du second terme, c'est-à-dire,..... $zz=x-3$, on changera cette équation en... $x^3+12x-8=0$, qui n'est que du troisieme degré, et qui n'a point de second terme.

Comparant alors cette équation avec.... $x^3+px+q=0$, on a $p=12$, $q=-8$, et partant $\sqrt{(\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}qq)}=\sqrt{80}$; d'où $x$, ou....

$$\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{27}p^3+\tfrac{1}{4}q^2)})}$$
$$-\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{27}p^3+\tfrac{1}{4}q^2)})}$$
$$=\sqrt[3]{(4+\sqrt{80})}-\sqrt[3]{(-4+\sqrt{80})},$$

et comme, par la supposition, $zz=x-3$, ou $z=\sqrt{(x-3)}$, on aura alors l'inconnue cherchée

$$z=\pm\sqrt{\{\sqrt[3]{(4+\sqrt{80})}-\sqrt[3]{(-4+\sqrt{80})}-3\}}$$

et les deux valeurs que cette expression donne

en prenant le radical en + et en —, sont les seules réelles des six que doit avoir l'équation proposée.

En général, qu'on ait une équation telle que $z^{3m}+az^{2m}+bz^m+c=0$, on la réduira tout de suite à une du troisieme degré et sans second terme, en faisant $z^m=x-\frac{1}{3}a$.

Equations plus élevées qui s'y réduiroient aussi.

## XVIII.

Supposons présentement qu'on ait l'équation $x^3+3x-4=0$, à résoudre; cette équation n'ayant point de second terme, on peut tout de suite la comparer à $x^3+px+q=0$, et l'on a, par cette comparaison, $p=3$ et.. $q=-4$, et comme $p$ est positif, on voit, par l'article XIV, que la formule générale de l'article VI doit encore réussir dans ce cas. Substituant en effet ces valeurs de $p$ et de $q$ dans la formule générale.....

$$x=\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{27}p^3+\tfrac{1}{4}q^2)})}$$
$$-\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q+\sqrt{(\tfrac{1}{27}p^3+\tfrac{1}{4}q^2)})}$$

on a, pour la seule valeur réelle de $x$,..... $\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})}-\sqrt[3]{(-2+\sqrt{5})}$. Si l'on applique présentement à cette expression la méthode de la quatrieme partie, articles XXXV, XXXVIII et XLI, on verra qu'elle se peut aisément réduire, parce que $2+\sqrt{5}$ est le cube de $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, et que $-2+\sqrt{5}$ est celui de $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, d'où cette valeur de $x$ se réduit à 1.

On auroit pu parvenir à cette même valeur de $x$ sans la formule précédente, en employant la regle de la troisieme Partie, articles XII et XIII; car on auroit trouvé que $x-1$ etoit un diviseur exact de la quantité $x^3+3x-4$.

## XIX.

Quatrieme exemple dans lequel la formule de l'art VI est insuffisante,

Soit maintenant proposé de résoudre l'équation $x^3-90x-98=0$. En comparant cette équation à l'équation générale $x^3+px+q=0$, on a $p=-90$ et $q=-98$ : or $p$ étant négatif et tel que $\frac{1}{27}p^3$ est plus grand que $\frac{1}{4}q^2$, l'équation proposée est de celles qui ne peuvent pas se résoudre par la formule précédente. Je cherche alors, par la méthode de la troisieme partie, articles XII et XIII, si elle n'aura pas quelque diviseur, et ayant reconnu qu'elle n'en a point, je me sers de la méthode enseignée, article X, pour trouver une valeur approchée.

Application de la méthode de l'article X pour approcher des racines.

Pour cela, je commence par substituer pour $p$ et $q$ leurs valeurs $-90$ et $-98$ dans la formule générale .....

$$x=\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\left(\tfrac{1}{27}p^3+\tfrac{1}{4}q^2\right)}\right)}$$
$$-\sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\left(\tfrac{1}{27}p^3+\tfrac{1}{4}q^2\right)}\right)}$$

et j'ai.....

$$x=\sqrt[3]{(49+\sqrt{(-24599)})}$$
$$-\sqrt[3]{(-49+\sqrt{(-24599)})}$$

qui, étant comparée à l'expression..... $\sqrt{(-a+b\sqrt{(-1)})}-\sqrt[3]{(a+b\sqrt{(-1)})}$, laquelle est devenue (article X) la suite infinie

$$-\frac{2a}{3b^{\frac{1}{3}}}\left\{-1+\frac{5a^2}{27b^2}-\frac{22a^4}{243b^4}+\frac{374a^6}{6561b^6}-\text{etc.}\right\}$$

donne $a=-49$, $bb=+24599$, qu'il ne s'agit plus que de substituer dans cette suite infinie.

Pour faire cette substitution, je commence par prendre la racine cube de 24599, afin d'avoir $b^{\frac{2}{3}}$, l'opération faite, j'ai environ 29,08 pour cette racine cube, et partant $\frac{2a}{3b^{\frac{1}{3}}}$, ou.. $\frac{98}{3\sqrt[3]{(24599)}}$ est environ $\frac{9800}{8724}$.

Quarrant ensuite $a$ et le divisant par $bb$, j'ai pour $\frac{a^2}{b^2}$ environ 0,0976, dont le quarré 0,00952 est la valeur de $\frac{a^4}{b^4}$; quant à la valeur de $\frac{a^6}{b^6}$, et des puissances plus élevées, elle est inutile dans cette suite, dont la marche est assez prompte.

Faisant alors les substitutions des valeurs de $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^4}{b^4}$ à la place de ces quantités, j'ai environ $-1$, 104 pour la valeur de $x$, donnée par la formule de l'article VI; si on veut avoir les deux autres valeurs de $x$ qui doivent aussi être réelles, suivant l'article XIV, il n'y a qu'à diviser l'équation..... $x^3-90x-98=0$ par $x+1$, 104, qui est à très-peu de chose près, suivant ce que l'on

vient de voir, une de ses racines. La division faite, on a pour quotient $xx-1{,}104x-88{,}781$ et pour reste 0,0142, quantite assez petite, pour être negligée; de sorte qu'on peut regarder l'équation $xx-1{,}104x-88{,}781=0$, comme le quotient exact de la division de.. $x^3-90x-98=0$ par $x+1{,}104$, et comme le produit des deux racines cherchées. Résolvant donc cette équation, on a pour les deux valeurs de $x$ qu'elle donne

$$x=0{,}552\pm\sqrt{89{,}0857},$$

c'est-à-dire, $+9{,}990$ et $-8{,}886$.

Ainsi les trois valeurs de $x$ dans l'équation proposée $x^3-90x-98=0$ sont à-peu-près $-1{,}104$; $+9{,}990$; $-8{,}886$. Quant aux valeurs exactes, aucunes des méthodes connues jusqu'à présent ne sauroient les faire trouver, et toute équation qui ayant, comme la précédente, ses coefficiens rationels n'aura aucun diviseur rationel, sera de même irrésoluble par ces méthodes, lorsque $\frac{1}{27}p^3$ sera négatif et plus grand que $\frac{1}{4}qq$.

Cas irréductible du troisieme degré.

## XX.

Inconvénient de l'approximation enseignée, article X.

La méthode que nous venons d'employer pour résoudre par approximation les équations du troisieme degré dont les trois racines sont réelles, a cet inconvénient, que lorsque $a$ differe peu de $b$, les termes de la série qui exprime la valeur de $x$, décroissent si lentement, qu'il en faut un très-grand

nombre pour approcher un peu exactement de la vraie valeur de $x$, et que, par conséquent, les calculs deviennent extrêmement pénibles. Il est donc à propos de chercher quelque méthode plus généralement commode dans la pratique.

## XXI.

Autre méthode d'approximation générale et facile dans la pratique.

Dans cette vue, je reprends l'équation... $x^3+px+q=0$, ou plutôt $x^3-px+q=0$ (les cas qui échappent à la méthode de l'article VI ne se trouvant jamais que parmi ceux où $p$ est négatif) et je me propose de lui donner cette forme $z^3-z=r$, qui est plus simple, à cause qu'elle ne renferme qu'un terme d'indéterminé.

Afin de faire cette transformation, je fais $x=mz$; ce qui change l'équation..... $x^3-px+q=0$ en $z^3-\frac{p}{m^2}z=-\frac{q}{m^3}$, qui m'apprend qu'en faisant $m=-\sqrt{p}$, si $q$ est négatif, je donnerai toujours à l'équation $x^3-px+q=0$ la forme $z^3-z=+r$.

Je remarque présentement que si cette équation est de celles que la formule de l'article VI ne sauroit résoudre, il faudra nécessairement que $r$ soit plus petit que $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}$, ou $\sqrt{\frac{4}{27}}$; et qu'en même tems il y ait une des racines qui soit positive, et plus grande que l'unité, mais moindre que $\sqrt{\frac{4}{3}}$. Car si $z$ surpassoit $\sqrt{\frac{4}{3}}$, on auroit pour $r$, c'est-à-dire,

pour $z^3 - z$ un nombre plus grand que $\sqrt{\frac{4}{27}}$, et par conséquent l'équation $z^3 - z = r$ seroit du nombre de celles où la formule de l'article VI réussit.

Cela posé, je fais $z = 1 - \delta$, et substituant cette valeur dans l'équation $z^3 - z = r$, elle donne $2\delta + 3\delta\delta + \delta^3 = r$, dans laquelle je remarque que $\delta$ étant une quantité toujours plus petite que $\sqrt{\frac{4}{3}} - 1$, c'est-à-dire, plus petite que 0,155, son cube est plus petit que 0,0037. Or, ce cube étant donc si petit, je vois qu'on ne peut pas commettre une grande erreur en négligeant le terme $\delta^3$ dans l'équation $2\delta + 3\delta\delta + \delta^3 = r$, c'est-à-dire, en se contentant de résoudre l'équation $2\delta + 3\delta\delta = r$. Je résous donc cette équation, et elle me donne $\delta = \pm\sqrt{(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}r)} - \frac{1}{3} = \frac{\pm\sqrt{(1+3r)} - 1}{3}$ et par conséquent $z$, ou $1 + \delta = \frac{2 \pm \sqrt{(1+3r)}}{3}$, ou simplement $z = \frac{2 + \sqrt{(1+3r)}}{3}$, puisque des valeurs de $z$, on ne cherche que celle qui surpasse l'unité, et qui est positive.

Pour savoir à quoi peut monter l'erreur qu'on commet dans cette méthode, en négligeant le terme $\delta^3$, prenons le cas où ce terme est le plus grand; supposons que $z$ ou $1 + \delta$ soit $\sqrt{\frac{4}{3}}$, ce qui ne peut jamais arriver, tant que l'équation proposée est de celles qui échappent à la methode de l'article VI. Nous aurons alors $r = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}$, et notre méthode nous

donnera pour valeur de $z$, $\frac{2+\sqrt{(1+\sqrt{\frac{1}{3}})}}{3}$, au lieu de la vraie valeur $\sqrt{\frac{1}{3}}$. Or, il est aisé de reconnoître que ces deux quantités ne different entre elles que d'environ un millieme; voilà donc la plus grande erreur qu'on puisse craindre, en prenant $\frac{2+\sqrt{(1+3r)}}{3}$ pour la racine positive de l'équation $z^3-z=r$, si cette équation est de celles où la formule de l'article VI ne peut s'appliquer.

La méthode qu'on vient d'enseigner donne d'abord $x$ à un millieme près.

Ayant calculé la valeur de $z$ par l'expression $\frac{2+\sqrt{(1+3r)}}{3}$, il faudra la multiplier par $m$ pour avoir la valeur approchée de $x$.

## XXII.

Si on ne trouve pas que cette résolution de l'équation proposée approche assez de la véritable, c'est-à-dire, qu'on regarde les erreurs qui pourroient aller aux environs d'un millieme comme trop considerables, rien ne sera plus aisé que de trouver une autre valeur de la racine beaucoup plus exacte, par une opération fondée sur les mêmes principes. Après avoir calculé cette premiere valeur de $x$, et l'avoir nommé pour abréger $k$, on imaginera que la correction qu'il faut lui faire soit $\epsilon$, c'est-à-dire, qu'on supposera que le véritable $x$ soit $k+\epsilon$. Substituant alors cette quantite pour $x$ dans l'équation..... $x^3-px+q=0$, l'on aura $k^3+3k^2\epsilon+3k\epsilon^2+\epsilon^3-pk-p\epsilon+q=0$, ou simplement $k^3+3k^2\epsilon$

$+3k\epsilon^2 - pk - p\epsilon + q = 0$, en négligeant le terme $\epsilon^3$ qui est bien plus négligeable que ne l'étoit le terme $\delta^3$ à la premiere opération, puisqu'il est infiniment plus petit. Résolvant ensuite cette équation, la valeur de $\epsilon$ qu'elle donnera, sera la correction, qui, étant faite à la premiere valeur de $x$, en donnera une seconde infiniment plus exacte.

Si on n'étoit pas encore content de cette seconde, on en trouveroit une troisieme, en nommant la seconde valeur $l$, et substituant $l+\varphi$ à la place de $x$ dans l'équation proposée $x^3 - px + q = 0$, et ainsi de suite.

Mais, bien loin qu'on ait communément besoin d'employer des corrections si multipliées, on pourra très-souvent se contenter de la valeur de $x$ trouvée en premier lieu, ou tout au plus il suffira, après la substitution de $k+\epsilon$ pour $x$ dans l'équation $x^3 - px + q = 0$ de résoudre l'équation $k^3 + 3k^2\epsilon - pk - p\epsilon + q = 0$; c'est-à-dire, qu'on pourra non-seulement négliger le terme $\epsilon^3$, mais le terme $3k\epsilon^2$, parce que ce terme est déjà très-petit.

## XXIII.

Application de cette méthode à un exemple.

Faisons présentement quelqu'application de cette méthode. Soit, par exemple, l'équation $z^3 - z = \frac{1}{3}$. En substituant $\frac{1}{3}$ pour $r$ dans l'expression $\frac{2+\sqrt{(1+3r)}}{3}$, elle deviendra $\frac{2+\sqrt{2}}{3}$ c'est-à-dire, environ 1,138 qui est un peu

plus grande que la vraie valeur de $z$; mais qui l'est de bien peu, puisque 1,137, comme on peut le voir aisément par le calcul, seroit trop petit.

Pour approcher plus exactement de la vraie valeur de $z$, on substituera $1{,}138+\epsilon$ à la place de $z$ dans l'équation $z^3-z=\frac{5}{13}$, et l'on aura $0{,}002426739+2{,}885132\epsilon=0$ en négligeant les termes affectés de $\epsilon^2$ et de $\epsilon^3$. Cette équation étant résolue, elle donne $\epsilon=-0{,}000841$, et partant pour la valeur de $z$ corrigée, 1,137159. Si on avoit voulu faire cette correction plus exacte, en ne négligeant que le terme affecté de $\epsilon^3$, on auroit résolu l'équation .....

$$0{,}002426739+2{,}885132\epsilon+3{,}414\epsilon^2=0,$$

ce qui auroit donné la correction.....

$\epsilon=-0{,}000841836$, c'est-à-dire, pour $z$ corrigée 1,137158164.

## XXIV.

Supposons maintenant qu'il s'agisse de résoudre l'équation $x^3-13x+5=0$; je fais.... $x=-z\sqrt{13}$, et elle se change en $z^2-z=\frac{5}{13\sqrt{13}}$: égalant donc $r$ à $\frac{5}{13\sqrt{13}}$ dans la première valeur approchée, $\frac{2+\sqrt{(1+r)}}{3}$, de $z$, cette valeur devient $\frac{2+\sqrt[3]{\left(1+\frac{15}{13\sqrt{13}}\right)}}{3}$, et elle donne, par conséquent, pour $x$, $\frac{-2\sqrt{13}-\sqrt{\left(13+\frac{15}{\sqrt{13}}\right)}}{3}$, c'est-à-dire, en-

Autre exemple.

viron —3,784. Si on veut avoir une valeur de $x$ plus exacte, on supposera $x=-3{,}784+\epsilon$; on substituera cette valeur dans l'équation.. $x^3-13x+5=0$, et l'on aura, en négligeant les termes affectés de $\epsilon^2$ et de $\epsilon^3$, l'équation $0{,}01020596+29{,}95597\epsilon=0$, qui donnera.. $\epsilon=-0{,}000341$, et, par conséquent, ..... $x=-3{,}784341$, valeur plus exacte que la premiere.

## XXV.

**Résolution générale de l'équation du quatrieme degré.**

Après avoir montré la maniere dont on parvient à la solution des équations du troisieme degré, voyons maintenant les moyens qu'il faut employer pour résoudre celles du quatrieme degré.

Prenant d'abord une équation générale $y^4+ay^3+by^2+cy+d=0$ pour représenter toutes les équations du quatrieme degré, on réduit bientôt la difficulté à ne résoudre qu'une équation représentée par $z^4+pz^2+qz+r=0$, en faisant $y=z-\frac{1}{4}a$. Ensuite pour résoudre cette équation, ce qui paroît le plus simple, c'est de la regarder comme le produit des deux opérations du second degré, et faire en sorte que la détermination des coefficiens que doivent avoir les termes de ces équations du second, ne dépendent que d'équations plus aisées à résoudre que la proposée.

Soit pris d'abord $zz+xz+t=0$ pour l'une de ces équations; il est évident que l'autre devra

devra avoir pour second terme $-xz$, puisque le produit de ces deux équations doit donner une équation dénuée du second terme: soit donc pris pour cette seconde équation $zz-xz+s=0$, en multipliant ces équations l'une par l'autre, on aura.....

$$\begin{array}{r} z^4+szz+sxz+ts=0 \\ -x^2\ -tx \\ +t \end{array}$$

qui, étant comparée avec la proposée, donne, pour déterminer $s$, $t$, $x$, les trois équations $s-xx+t=p$, $sx-tx=q$, $ts=r$.

Pour faire usage de ces trois équations, je multiplie la premiere par $x$, et je l'ajoute ensuite avec la seconde équation; j'ai alors $2sx-x^3=px+q$, d'où je tire $s=\frac{q+px+x^3}{2x}$ que je substitue dans l'équation $ts=r$, ce qui me donne $t=\frac{2rx}{x^3+px+q}$.

Or ces deux valeurs de $s$ et de $t$ étant mises dans l'équation $sx-tx=q$, j'ai enfin..

$$\frac{x^3+px+q}{2}-\frac{2rx^2}{x^3+px+q}=q, \text{ ou}$$

$$x^6+2px^4+ppx^2-q^2=0,$$
$$-4r$$

équation du sixieme degré, qui, par la méthode de l'article XVII, se change en une du troisieme, d'où la difficulté des équations du quatrieme degré est réduite à celle du troisieme. Car cette derniere équation (qu'on appelle la réduite) étant résolue, on n'aura

La résolution d'une équation du quatrième degre dépend d'une équation du troisième.

Cette équation s'appelle la réduite.

qu'à substituer la valeur de $x$ qu'elle donne dans les équations $zz-xz+s=0$, $zz+xz+t=0$, ou plutôt $zz-xz+\frac{1}{2}xx+\frac{1}{2}p+\frac{q}{2x}=0$ et $zz+xz+\frac{2r}{xx+p+\frac{q}{x}}=0$, et résoudre ensuite ces équations, ou, ce qui revient au même, substituer la valeur de $x$ dans les racines.... $z=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{(-\frac{1}{4}xx-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2x})}$ et..... $z=-\frac{1}{2}x\pm\sqrt{\left(-\frac{2r}{xx+p+\frac{q}{x}}+\frac{1}{4}xx\right)}$ de ces deux équations, et l'on aura les quatre racines cherchées de l'équation $z^4+pz^2+qz+r=0$, et partant celles de l'équation proposée..... $y^4+ay^3+by^2+cy+d=0$ qui l'avoit produite.

XXVI.

Dans le quatrieme degré on peut exprimer les quatre racines par une seule formule.

Il paroît d'abord par l'expression de ces valeurs, que, dans le quatrieme degré, ainsi que dans le troisieme, on ne sauroit arriver à une seule expression pour toutes les racines de l'équation. Cependant si on remarque que la quantité $x$, que renferment les deux expressions précédentes, est nécessairement un radical quarré, puisqu'elle est venue de la résolution d'une équation où $x$ n'est élevé qu'à des puissances paires, on verra, sans peine, que chacune des expressions précédentes peut désigner quatre racines, la pre-

miere s'écrivant alors ainsi.....

$$z=\pm\tfrac{1}{2}x\pm\sqrt{\left(-\tfrac{1}{4}xx-\tfrac{1}{2}p\mp\tfrac{q}{2x}\right)},$$

et la seconde.....

$$z=\mp\tfrac{1}{2}x\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}xx-\frac{2r}{xx+p\pm\frac{q}{x}}\right)}.$$

Ces deux équations paroissant d'abord différentes, on peut craindre de s'être trompé dans le raisonnement précédent ; puisqu'il semble mener à une absurdité, qui seroit d'avoir huit racines pour une équation du quatrieme degré, mais il est aisé de voir qu'elle n'est qu'apparente; car l'identité de ces deux expressions se réduit à celle de.....

$$\sqrt{\left\{-\tfrac{1}{4}xx-\frac{-2r}{xx+p\mp\frac{q}{x}}\right\}}$$

et de $\sqrt{(-\frac{1}{4}xx-\frac{1}{2}p\mp\frac{q}{2x})}$, c'est-à-dire, de $-\frac{1}{2}xx-\frac{1}{2}p\mp\frac{q}{2x}$, et de $\frac{-2r}{xx+p\mp\frac{q}{x}}$.

Or, l'identité de ces deux dernieres quantités ne sauroit manquer d'avoir lieu aussitôt que $x$ a été déterminée par l'équation.....

$$x^6+2px^4+p^2x^2-q^2=0$$
$$-4r$$

puisque cette équation se tire évidemment de l'égalité de $-\frac{1}{2}xx-\frac{1}{2}p\mp\frac{q}{2x}$ et de $\frac{-2r}{xx+p\mp\frac{q}{x}}$.

XXVII.

Des deux expressions précédentes, la premiere $z = \pm\frac{1}{2}x \pm \sqrt{(-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x})}$ étant la plus aisée à employer, sera celle qu'il faudra choisir, et les quatre valeurs générales de $z$, qu'elle exprime à la fois, sont..

$$z = \tfrac{1}{2}x + \sqrt{(-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p - \tfrac{q}{2x})}$$
$$z = \tfrac{1}{2}x - \sqrt{(-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p - \tfrac{q}{2x})}$$
$$z = -\tfrac{1}{2}x + \sqrt{(-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p + \tfrac{q}{2x})}$$
$$z = -\tfrac{1}{2}x - \sqrt{(-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p + \tfrac{q}{2x})}$$

XXVIII.

Comme l'équation d'où l'on tire la valeur de $x$, donne nécessairement trois valeurs de $x$ précédées du signe $\pm$, et qu'on n'a aucune raison pour préférer l'une de ces valeurs aux autres; que d'ailleurs on sait qu'une équation du quatrieme degré ne sauroit avoir plus de quatre racines, il vient assez naturellement dans l'esprit qu'on peut indifféremment employer celle qu'on voudra de ces trois valeurs de $x$, précédée de $\pm$, et en tirer cependant toujours la même expression pour les quatre valeurs de $z$.

On arrive aux mêmes racines d'une équation du quatrième degré, quelque soit celle des racines de la reduite qu'on ait prise.

Mais quoiqu'après avoir un peu réfléchi sur la théorie des équations, on ne puisse guères douter que cela ne soit ainsi, on doit souhaiter de s'en assurer par le detail du calcul.

Pour y parvenir, ce qui se presente le plus naturellement, c'est de trouver les trois valeurs de $x$, précédées de $+$, que donne l'équation

$$x^6+2px^4+ppx^2-q^2=0,$$
$$-4r$$

et les substituer ensuite l'une après l'autre dans l'expression.....;

$$z=\pm\tfrac{1}{2}x\pm\sqrt{(-\tfrac{1}{4}xx-\tfrac{1}{2}p\mp\tfrac{q}{2x})}$$

afin de reconnoître l'identité des trois différentes expressions qu'on auroit par ces substitutions; mais le calcul que cette méthode demanderoit est si long, qu'on ne sauroit se résoudre à le suivre jusqu'au bout. Voici une autre maniere de parvenir au même résultat.

Je remarque d'abord que quelle que soit la valeur de $x$ que je substitue dans l'expression générale

$$z=\pm\tfrac{1}{2}x\pm\sqrt{(-\tfrac{1}{4}xx-\tfrac{1}{2}p\mp\tfrac{q}{2x})}$$

les quatre valeurs de $z$, exprimées à la fois par cette quantité, pourront être représentées par $i+k$, $i-k$, $-i+l$, $-i-l$; ou, ce qui revient au même, que les quatre facteurs de l'équation $z^4+pzz+qz+r=0$ pourront être répresentés par $z-i-k$, $z-i+k$, $z+i-l$, $z+i+l$; $i$ désignant alors la partie $\frac{1}{2}x$ de la valeur de $z$, et $k$ et $l$ les deux quantités.....

$$\sqrt{(-\tfrac{1}{4}xx-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{q}{2x})}$$

et

$$\sqrt{(-\tfrac{1}{4}xx-\tfrac{1}{2}p+\tfrac{q}{2x})};$$

multipliant donc ces quatre facteurs les uns par les autres, j'ai l'équation.....

$$\begin{array}{llll} z^4 & -2\ddot{\imath}z^2 & -2\dot{\imath}kkz & +i^4=0 \\ & -kk & +2ill & -\ddot{\imath}kk \\ & -ll & & -\ddot{\imath}ll \\ & & & +kkll \end{array}$$

qui, etant comparée à $z^4+pzz+qz+r=0$ donne les équations.....

$$p=-2\ddot{\imath}-kk-ll,\quad q=-2\dot{\imath}kk+2ill,$$
$$r=i^4-\ddot{\imath}kk-\ddot{\imath}ll+kkll,$$

par lesquelles l'équation

$$\begin{array}{llll} x^6 & +2px^4 & +ppx^2 & -q=0 \\ & & & -4r \end{array}$$

se change en

$$\begin{array}{llll} x^6 & -4ii x^4 & +8iikkx^2 & -4ii\,k^4=0 \\ & -2kk & +8iill & +8iikkll \\ & -2ll & +k^4 & \\ & & -2kkll & -4ii\,l^4 \\ & & +l^4 & \end{array}$$

dont les racines sont

$$x=\pm 2i;\ x=\pm k\pm l;\ x=\pm k\mp l;$$

or, si on substitue présentement celle qu'on voudra de ces valeurs de $x$ dans les quatre expressions contenues dans

$$z=\pm\tfrac{1}{2}x\pm\sqrt{(-\tfrac{1}{4}xx-\tfrac{p}{2}\mp\tfrac{q}{2x})}$$

ou plutôt dans

$$z=\pm\tfrac{1}{2}x\pm\sqrt{(-\tfrac{1}{4}xx+\ddot{\imath}+\tfrac{1}{2}kk+\tfrac{1}{2}ll\pm\tfrac{ill-ikk}{x})}$$

on verra qu'il en viendra également les quatre valeurs de $z$,

$$i+k,\quad i-k,\quad -i+l,\quad -i-l.$$

XXIX.

La méthode précédente fournit non-seulement le moyen de démontrer que les trois racines de la réduite

$$x^6+2px^4+ppxx-qq=0,$$
$$-4r$$

donnent le même résultat par leur substitution dans l'équation $z^4+pz^2+qz+r=0$; elle met de plus à portée de remarquer une vérité importante sur les équations du quatrieme degré; c'est que leurs racines sont toujours ou toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires, ou bien que des quatre racines, deux sont réelles, et les deux autres imaginaires. Car il n'est pas possible de faire d'autres suppositions pour les quatre racines de l'équation donnée, aussitôt qu'on est assuré comme on vient de l'être, que ces quatre racines sont toutes exprimées à la fois par la formule $\pm\frac{1}{2}x\pm\sqrt{(-\frac{1}{4}xx-\frac{1}{2}p\mp\frac{q}{2x})}$.

Les racines d'une équation du quatrième degré sont toutes réelles ou toutes imaginaires, ou deux réelles et deux imaginaires.

XXX.

En jettant les yeux sur cette valeur des racines des équations du quatrieme degré, on croiroit volontiers, à cause que $x$ est un radical quarré, que, lorsque quelques-unes de ces racines sont imaginaires, elles pourroient

être des quantités imaginaires d'une autre nature que celles qu'on rencontre dans le second degré; c'est-à-dire, qu'au lieu d'être simplement la somme d'une quantité réelle, et de la racine d'une quantité réelle, mais négative, telle, par exemple, qu'est $a+\sqrt{-b}$, elles pourroient être des quantités composées de racines imaginaires simples, et de la racine d'autres quantités en partie réelles et en partie imaginaires, comme seroit..... $\sqrt{(-b)+\sqrt{(a+\sqrt{(-b)})}}$; mais il est aisé de s'assurer que toutes les racines imaginaires du quatrieme degré peuvent se réduire, ainsi que celles du second, à la somme de quantités réelles et de la racine des quantités réelles négatives. Car ayant vu dans les articles précédens, que, lorsqu'on veut trouver la valeur de $z$, on peut choisir à volonté entre les valeurs de $xx$ que donne la réduite, et remarquant d'ailleurs, par la théorie des équations, que cette réduite, qui a toujours pour dernier terme ou produit des racines, une quantité $qq$ négative, doit par conséquent avoir nécessairement une valeur de $xx$ positive, on verra que $x$ pourra toujours être une quantité réelle, et que, dans ce cas, lorsque

Les racines imaginaires du quatrième degré sont de même nature que celles du second.

$$\sqrt{(-\tfrac{1}{4}xx-\tfrac{1}{2}p\pm\tfrac{q}{2x})}$$

sera imaginaire, ce ne sera autre chose que la racine d'une quantité réelle et négative.

XXXI.

Une autre remarque que peut fournir encore l'article XXVIII, c'est que toutes les fois que des quatre racines deux seront imaginaires et deux réelles, la réduite

Lorsque des quatre racines deux sont réelles et deux imaginaires, on résout exactement l'équation.

$$x^6 + 2px^4 + ppx^2 - qq = 0$$
$$- 4r$$

sera du nombre des équations exactement résolues par la formule de l'article VI, c'est-à-dire, qu'on arrivera alors à la solution complette de l'équation

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0$$

Au contraire, lorsque les quatre racines seront ou toutes réelles, ou toutes imaginaires, l'équation réduite ne pourra pas se résoudre par la formule de l'article VI, et par conséquent l'on ne parviendra pas en ce cas à la solution de l'équation

C'est le contraire, lorsque les quatre racines sont toutes réelles ou toutes imaginaires.

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0$$

Ces deux vérités se tirent de ce que la réduite

$$\begin{array}{llll} x^6 - 4iix^4 & + 8iikkx^2 & - 4iik^4 = 0 \\ - 2ll & + 8iill & + 8iikkll \\ - 2kk & + k^4 & - 4iil^4 \\ & - 2kkll & \\ & + l^4 & \end{array}$$

est le produit des trois racines $xx - 4ii$, .... $xx - kk - 2kl - ll$, $xx - kk + 2kl - ll$; or, si

une des deux quantités $k$ ou $l$ seulement est imaginaire, les deux racines $xx-kk-2kl-ll$, $xx-kk+2kl-ll$ sont imaginaires, et, par conséquent, la réduite est alors résoluble par la formule de l'article VI.

Si, au contraire, $k$ et $l$ sont toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires, les trois racines $xx-4ii$, $xx-kk-2kl-ll$, ..... $xx-kk+2kl-ll$ de la réduite, seront toutes trois réelles, et par conséquent la formule de l'article VI ne pourra pas les donner; ainsi, dans le quatrieme degré, comme dans le troisieme, les formules de la résolution ne sauroient s'appliquer qu'aux équations qui ont deux racines imaginaires.

## XXXII.

Manière de distinguer le cas de quatre racines réelles de celui des quatre imaginaires.

Lorsqu'on aura une équation du quatrieme degré à résoudre, et qu'on aura formé par son moyen la réduite

$$x^6 - 2px^4 + ppx^2 - qq = 0, \quad -4r$$

si on trouve qu'elle échappe à la formule de l'article VI, et qu'on se propose de savoir si alors les quatre racines sont réelles, ou si elles sont toutes quatre imaginaires, on y parviendra aisément, en partant des deux réflexions suivantes, qui se présentent assez naturellement, lorsqu'on examine la réduite de l'article XXVIII.

1.° Dans le cas où les quatre racines sont réelles, la réduite

$$\begin{array}{llll} x^6 & -4iix^4 & +8iikkx^2 & -4iik^4 = 0 \text{ ou} \\ & -2kk & +8iill & +8iikkll \\ & -2ll & +k^4 & -4iil^4 \\ & & -2kkll & \\ & & +l^4 & \end{array}$$

$$x^6 - 2(ii+kk+ll)x^4 + 8ii(kk+ll) + (kk-ll)^2 x^2 - 4ii \times (kk-ll)^2 = 0$$

Conditions des quatre racines réelles.

a nécessairement un second terme négatif et un troisieme terme positif, puisque..... $-2(2ii+kk+ll)$ ne sauroit être ni zéro, ni positif, tant que $i$, $k$, $l$, sont des quantités réelles, et que

$$8ii(kk+ll) + (kk-ll)^2$$

ne sauroit non plus être ni zéro ni négatif dans les mêmes conditions.

2.° Si, au contraire, les quatre racines sont imaginaires; ou, ce qui revient au même, si $kk$ et $ll$ sont négatifs, la réduite, qui doit alors s'écrire ainsi

$$\begin{array}{llll} x^6 & -4iix^4 & -8iikkx^2 & -4iik^4 = 0, \\ & +2kk & -8iill & +8iikkll \\ & +2ll & +k^4 & -4iil^4 \\ & & -2kkll & \\ & & +l^4 & \end{array}$$

ou, ce qui revient au même,

$$x^6 + 2(kk+ll-2ii)x^4 + \tfrac{1}{2}(kk+ll) \times (kk+ll-8ii) - 4kkll\} x^2 - 4ii(kk-ll)^2$$

Conditions des quatre racines imaginaires.

ne sauroit jamais avoir à la fois et le second terme négatif et le troisieme positif; car, si $kk+ll$ est plus petit que $2ii$, ce qui rendroit le second terme négatif, le troisieme terme, dont le coefficient est $(kk+ll)\times(kk+ll-8ii)-4kkll$, sera nécessairement négatif.

## XXXIII.

Toute équation du quatrième degré sans second terme, et qui a le troisième positif, a des racines imaginaires.

L'inspection de l'équation

$$z^4 - 2iiz^2 - 2ikkz - \text{etc.} \\ -kk \quad +2ill \\ -ll$$

donnée dans le même article XXVIII, fournit une remarque par laquelle on peut reconnoître, en quelques rencontres, si une équation, qui doit avoir ses quatre racines, ou toutes réelles, ou toutes imaginaires, est dans le premier de ces deux cas ou dans le second. C'est que toute équation du quatrieme degré, dont le second terme est évanoui, et dont le troisieme est positif, doit avoir nécessairement des racines imaginaires, puisque le troisieme terme de toutes ces équations représenté par $-(2ii+kk+ll)zz$, ne sauroit jamais être positif, tant que $ii$, $kk$, $ll$, seront positifs; c'est-à-dire, tant que les racines seront réelles. Or, dès qu'on saura qu'une équation du quatrieme degré a des racines imaginaires, et qu'on aura reconnu d'ailleurs qu'elle doit avoir ses quatre racines ou toutes réelles ou toutes imaginaires, on ne sera

plus embarrassé à savoir lequel de ces deux cas a lieu.

XXXIV.

Lorsqu'on aura reconnu que les quatre racines d'une équation du quatrieme degré sont réelles, avant d'entreprendre de résoudre par approximation sa réduite pour avoir la valeur de $x$ à substituer dans celle de $z$, il sera à propos d'examiner par les méthodes de la troisieme partie, si quelques-unes de ces racines ne seroient pas commensurables. S'il n'y en avoit qu'une, on n'en seroit gueres plus avancé pour avoir les trois autres, puisqu'alors il resteroit à résoudre une équation du troisieme degré, dont les trois racines seroient réelles. Mais, si l'équation du quatrieme degré avoit deux racines commensurables, elle n'offriroit plus aucune difficulté, aussitôt que ces deux racines seroient trouvées, parce qu'alors il ne resteroit plus qu'une équation du second degré à résoudre.

XXXV.

Avantage qu'on trouve à chercher les diviseurs commensurables dans la réduite plutôt que dans la proposée.

Lorsqu'une équation du quatrieme degré a deux racines commensurables, on peut les reconnoître plus aisément par sa réduite, que par elle-même; car il est clair alors que, dans les quatre valeurs de $z$, représentées généralement par $i+k$, $i-k$, $-i+l$, $-i-l$, $i$ ne pourra jamais être qu'une quantité commensurable, et partant dans la racine $xx-4ii$

de la réduite, $4ii$ représentera une quantité quarrée et commensurable : or, par cette réflexion, on peut diminuer beaucoup les tentatives nécessaires dans la méthode de la troisieme partie, articles XII et XIII, puisqu'il ne faudra chercher dans les diviseurs du dernier terme qu'une quantité quarrée et prise avec le signe —.

Il en seroit de même si l'équation

$$z^4+pzz+qz+r=0$$

devoit se décomposer en deux équations du second degré, dont les coefficiens fussent commensurables, au lieu d'employer alors la méthode de la troisieme partie, article XIX, il faudra employer celle des articles XII et XIII pour chercher les diviseurs de la réduite, et ne choisir parmi les diviseurs du dernier terme que les quantités quarrées et affectées du signe —.

## XXXVI.

Lorsqu'une équation où $x$ est au quatrieme degré, a deux racines commensurables, ou qu'elle est simplement composée de deux diviseurs du second degré, on peut dire qu'elle n'est pas véritablement du quatrieme degré, et il est bien simple alors qu'elle se résolve par la méthode du second degré ; mais il y a des équations nécessairement du quatrieme degré, qui se réduisent cependant à la méthode du second degré. Telles sont les équations traitées

dans la quatrieme partie, article XX, et les équations semblables à

$$\begin{array}{llll} z^4 + 2aazz - 8aabz + a^4 & & & = 0 \\ \quad -4abzz & & -4a^3b & \end{array}$$

qui est le produit des deux équations .....

$$zz - 2z\sqrt{ab} + aa - 2a\sqrt{ab} = 0$$

et $zz + 2z\sqrt{ab} + aa + 2a\sqrt{ab} = 0$

et qui a pour ses quatre racines

$$\pm\sqrt{ab} \pm \sqrt{(ab - a^2 \pm 2a\sqrt{ab})},$$

dans lesquels il n'entre point d'autres radicaux que ceux du second degré.

On peut distinguer aisément toutes les équations qui sont dans ce cas; car, puisque dans ces équations la partie $\pm\frac{1}{2}x$ de l'expression

$$\pm\tfrac{1}{2}x + \sqrt{(-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p \mp \tfrac{q}{2x})}$$

de la valeur de $z$; ou, ce qui revient au même, la partie $i$ commune aux quatre racines $i+k$, $i-k$, $-i+l$, $-i-l$, doit être un simple radical du second degré, à cause que $x$ ne monte qu'à des degrés pairs dans la réduite; il faut nécessairement que, dans toutes les équations de cette nature, la réduite soit divisible par $xx \pm$ une quantité commensurable : or, les diviseurs de cette espece sont aisés à trouver par la méthode des articles XII et XIII de la troisieme partie.

Manière de connoître les équations du quatrième degré, dont les racines n'ont point d'autres radicaux que ceux du second degré.

XXXVII.

Lorsqu'on aura reconnu que les quatre ra-

Ce qu'il faut faire pour avoir les valeurs approchées des quatre racines, lorsqu'elles sont réelles.

cines d'une équation du quatrieme degré sont toutes réelles, et que cette équation n'a aucun diviseur commensurable ni affecté de radicaux du second degré, on cherchera une des racines de sa réduite par la méthode d'approximation, enseignée article XXI, et après l'avoir substituée à la place de $x$ dans la formule générale

$$z = \pm \tfrac{1}{2}x \pm \surd(-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p \mp \tfrac{q}{2x}),$$

on aura les valeurs approchées des quatre racines cherchées.

## XXXVIII.

Application des méthodes précédentes à un exemple.

Dans la vue d'appliquer les regles précédentes, soit pris pour exemple l'équation

$$z^4 + 3z^2 + 2z - 3 = 0$$

En comparant cette équation à l'équation générale $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$, on aura

$$p = 3, \quad q = 2, \quad r = -3.$$

Et ces valeurs étant substituées dans la réduite générale

$$x^6 + 2pp\,x^4 + pp\,xx - qq - 4r = 0$$

la changent en

$$x^6 + 6x^4 + 21x^2 - 4 = 0$$

Pour résoudre cette équation, soit d'abord fait $x^3 = u - 2$, afin de faire évanouir le second terme, et la réduite se changera en... $u^3 + 9u - 30 = 0$; laquelle, suivant l'article XIV,

XIV, est de celles qui n'ont qu'une racine de réelle, et est, par conséquent, dans le cas d'être résolue par la formule générale de l'article VI; d'où l'on voit que l'équation proposée aura deux racines réelles et deux imaginaires, et qu'on parviendra, par conséquent, à les exprimer toutes les quatre par les formules précédentes.

On auroit pu reconnoître (article XXXIII) que cette équation devoit avoir des racines imaginaires, par cela seul, que son troisieme terme $2z$ avoit un coefficient positif.

Résolvant maintenant l'équation.....

$$u^3+9u-30=0,$$

par la formule de l'article VI, on a pour sa racine réelle.....

$$u=\sqrt[3]{(15+6\sqrt{7})}+\sqrt[3]{(15-6\sqrt{7})}$$

donc $\pm\sqrt{(u-2)}$, ou.....

$$x=\pm\sqrt{\{\sqrt[3]{(15+6\sqrt{7})}+\sqrt[3]{(15-6\sqrt{7})}-2\}}$$

Si on substitue ensuite cette valeur de $x$ dans la valeur générale.....

$$z=\pm\tfrac{1}{2}x\pm\sqrt{(-\tfrac{1}{4}xx-\tfrac{p}{2}\mp\tfrac{q}{2x})}$$

qui est dans le cas présent.....

$$x=\pm\tfrac{1}{2}x\pm\sqrt{(-\tfrac{1}{4}xx-\tfrac{3}{2}\mp\tfrac{1}{x})}$$

on aura pour les deux racines réelles de l'équation proposée.....

$$z=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\{\sqrt[3]{(15+6\sqrt{7})}+\sqrt[3]{(15-6\sqrt{7})}-2\}}$$
$$\pm\sqrt{\{-\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{(15+5\sqrt{7})}-\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{(15-6\sqrt{7})}-1}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{(\sqrt[3]{(15+6\sqrt{7})}+\sqrt[3]{(15-6\sqrt{7})}-2)}}\}$$

et pour les deux imaginaires .....

$$z=+\tfrac{1}{2}\sqrt{\{\sqrt[3]{(15+6\sqrt{7})}+\sqrt[3]{(15-6\sqrt{7})}-2\}}$$
$$\pm\sqrt{\{-\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{(15+6\sqrt{7})}-\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{(15-6\sqrt{7})}-1}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{(\sqrt[3]{(15+6\sqrt{7})}+\sqrt[3]{(15-6\sqrt{7})}-2)}}\}$$

## XXXIX.

Soit présentement l'équation

Autre exemple.

$$z^4-6z^2+8z-1=0$$

en la comparant à l'équation générale, on en tirera $p=-6$, $q=8$, $r=-1$, et partant, la réduite sera $x^6-12x^4+40x^2-64=0$. Si on suppose $x^2=u+4$, afin que le second terme disparoisse, on aura $u^3-8u-32=0$, qui, étant comparée à la formule générale de l'article VI, donnera une seule valeur réelle, laquelle sera $\sqrt[3]{(16+\frac{80}{3\sqrt{3}})}+\sqrt[3]{(16-\frac{80}{3\sqrt{3}})}$,

ou $$u=\frac{2\sqrt[3]{(6\sqrt{3}+10)}+2\sqrt[3]{(6\sqrt{3}-10)}}{\sqrt{3}}$$

qui, en se servant de la méthode de la quatrieme partie, article XXXV, se réduit à

$$u=\frac{2(1+\sqrt{3})-2(1-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}=4$$

Substituant présentement cette valeur de $u$

dans $x=\sqrt{(u+4)}$, on aura $x=\sqrt{8}$, par laquelle on changera l'équation générale

$$z=\pm\tfrac{1}{2}x\pm\sqrt{(-\tfrac{1}{4}xx-\tfrac{p}{2}\mp\tfrac{q}{2x})}$$

en $z=\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{(1\mp\sqrt{2})}$, qui donne pour les deux racines réelles de l'équation proposée $-\sqrt{2}\pm\sqrt{(1+\sqrt{2})}$, et pour les deux imaginaires $+\sqrt{2}\pm\sqrt{(1-\sqrt{2})}$. Ainsi l'équation proposée $z^4-6z^3+8z-1=0$, est de celles qui peuvent se décomposer en deux équations du second degré, dont les coefficiens sont incommensurables; car chacune des doubles racines précédentes sont les racines des équations

$$zz+2z\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=0$$

et

$$zz-2z\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=0$$

On auroit pu, sans appliquer la formule de l'article VI, et, par conséquent, sans avoir besoin de la méthode de la quatrieme partie, article XXXV, résoudre l'équation

$$x^6-12x^4+40x^2-64=0,$$

en employant la méthode de la troisieme partie, articles XII et XIII; car on auroit trouvé, par cette méthode, que cette équation avoit pour diviseur $xx-8=0$.

## XL.

Troisième exemple.

Soit l'équation

$$y^4+16y^3+99y^2+228y+144=0.$$

En substituant dans cette équation $z-4$ pour

$y$, afin de faire évanouir le second terme, on la changera en $z^4+3z^2-52z+48=0$, qui, étant comparée à l'équation générale.....

$$z^4+pz^2+qz+r=0$$

donnera $p=3$, $q=-52$, $r=48$, et partant la réduite $x^6+6x^4-183x^2-2704=0$, de laquelle faisant évanouir le second terme par la substitution de $u-2$ à la place de $x^2$, on tirera $u^3-195u-2322=0$, qui est résoluble par la formule de l'article VI, et fait voir, par conséquent, que l'équation proposée est de celles qu'on peut résoudre exactement, c'est-à-dire, de celles qui ont deux racines réelles et deux imaginaires. Pour les trouver, soit donc employée la formule de l'article VI, à résoudre l'équation

$$u^3-195u-2322=0,$$

on aura, pour la seule valeur réelle qu'elle donne

$$u=\sqrt[3]{(1161+\sqrt{(1073296)})}-\sqrt[3]{(-1161+\sqrt{(1073296)})}$$

qui se réduit à.....

$$\sqrt[3]{(1161+1036)}-\sqrt[3]{(-1161+1036)},$$

ou à $\sqrt[3]{(2197)}+\sqrt[3]{(125)}$, ou enfin à 18; substituant présentement cette valeur de $u$ dans $x=\sqrt{(u-2)}$, on a $x=\sqrt{(16)}=4$, qu'il ne s'agit plus que de substituer dans la valeur générale de

$$z=\pm\tfrac{1}{2}x\pm\sqrt{(-\tfrac{1}{4}xx-\tfrac{p}{2}\mp\tfrac{q}{2x})}$$

on aura, par cette substitution, pour les deux racines réelles de l'équation

$z^4+3z^2-52z+48=0$; $z=2\pm\sqrt{(-4-\frac{3}{2}+\frac{13}{2})}$,

ou $z=2\pm1$, c'est-à-dire, ou 3, ou 1, et pour les deux racines imaginaires

$z=-2\pm\sqrt{(-4-\frac{3}{2}-\frac{13}{2})}$, ou $z=-2\pm\sqrt{-12}$.

Substituant ensuite ces quatre valeurs dans $y=z-4$, on aura pour les quatre racines de l'équation proposée

$$y^4+16y^3+99y^2+228y+144=0;$$
$$y=-1; y=-3; y=-6\pm\sqrt{(-12)}.$$

On auroit pu trouver ces racines, tant par la méthode de la troisieme partie, articles XII et XIII, que par celle de l'article XXIV de la même partie, en les cherchant dans l'équation

$$y^4+16y^3+99y^2+228y+144=0.$$

Car, par la premiere de ces méthodes, on auroit trouvé les diviseurs simples $y+1$, $y+3$, et pour quotient $yy+12y+48$; et la seconde auroit donné les deux diviseurs du second degré

$$yy+4y+3, \text{ et } yy+12y+48.$$

On auroit encore pu trouver ces racines bien facilement, en cherchant les diviseurs de la réduite, par le moyen de la méthode des articles XII et XIII de la troisieme partie, et en ajoutant à cette méthode l'attention de ne choisir parmi les diviseurs du nombre 2704,

que des nombres quarrés, et de ne les employer qu'avec le signe —. On auroit trouvé alors que la réduite a pour diviseur de cette espece $xx-16=0$, qui donne $x=4$.

XLI.

Quatrieme exemple.

Soit l'équation $z^4+11z^2-2z+56=0$. En la comparant à $z^4+pz^2+qz+r=0$, il vient $p=11$, $q=-2$, $r=56$; d'où la réduite est $x^6+22x^4-103x^2-4=0$, qui devient..... $u^3-\frac{793}{3}u+\frac{415822}{27}=0$, après avoir fait évanouir le second terme. Cette équation étant celles qui échappent à la formule de l'article VI, l'équation proposée doit être, ou de celles qui ont leurs quatre racines réelles, ou de celles qui les ont toutes quatre imaginaires; mais à cause du terme positif $11z^2$, il faut (article XXXIII) qu'il y ait des racines imaginaires : donc toutes les quatre racines le sont. On parvient ensuite à réduire ces quatre racines imaginaires à de simples racines imaginaires du second degré, en cherchant par la méthode des articles XII et XIII de la troisieme partie, les diviseurs de la réduite. Car, trouvant $xx-4$ pour diviseur de cette réduite, il s'ensuit que les quatre racines de l'équation proposée sont

$$z=+1\pm\sqrt{(-6)}, \text{ et } z=-1\pm\sqrt{(-7)}$$

XLII.

Cinquieme exemple.

Soit maintenant l'équation..... $z^4-5z^2+4z+29=0$, qui donne, par sa

comparaison avec.....

$$z^4 + p\,z^2 + q\,z + r = 0$$

$$p = -5\,,\ q = 4\,,\ r = 29\,,$$

et par conséquent la réduite

$$x^6 - 10x^4 - 91\,x^2 - 16 = 0$$

laquelle, en faisant $x^2 = u + \frac{10}{3}$, se changera en $u^3 - \frac{373}{3}u - \frac{10622}{27} = 0$. Or, comme cette équation est de celles que la formule de l'article VI ne sauroit résoudre, c'est-à-dire, de celles qui ont leurs trois racines réelles, il s'ensuit que les racines cherchées de l'équation $z^4 - 5z^2 + 4z + 29 = 0$, sont, ou toutes quatre réelles, ou toutes imaginaires. Et si on se rappelle qu'on a vu, article XXXII, que, lorsque les racines sont toutes réelles, la réduite a le second terme négatif, le troisieme positif, etc. on en conclura que la proposée est dans le cas d'avoir toutes ses racines imaginaires, à cause que le troisieme terme... $-91x^2$ de sa réduite est négatif.

Mais, par aucune méthode connue, on ne sauroit parvenir, ainsi que dans l'exemple précédent, à donner à ces quatre racines imaginaires la forme ordinaire des racines imaginaires du second degré (1), parce que la réduite n'ayant aucun diviseur commensurable, la proposée ne sauroit avoir ni des diviseurs commensurables ni des diviseurs affectés de simples radicaux du second degré.

(1) En quantités qu'on puisse obtenir rigoureusement.

XLIII.

Sixieme exemple. Soit l'équation $z^4 - 32zz - 16z - 2 = 0$, qui donne $p = -32$, $q = -16$, $r = -2$, et par conséquent la réduite.

$$x^6 - 64x^4 + 1032x^2 - 256 = 0$$

Cette réduite ayant, comme on peut aisément s'en assurer, ses trois racines réelles, fait voir que la proposée doit avoir toutes ses racines réelles ou toutes imaginaires; on s'assurera facilement par l'art. XXXII que c'est le premier de ces deux cas qui a lieu. Qu'on cherche maintenant, par la méthode des art. XII et XIII de la troisieme partie, les diviseurs de cette réduite, et l'on trouvera $xx - 32$ qui, au moyen de l'expression générale ....

$$z = \pm \tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{(-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p \pm \tfrac{q}{2x})}$$

donne pour les quatre racines cherchées

$2\sqrt{2} + \sqrt{(8+\sqrt{2})}$, $2\sqrt{2} - \sqrt{(8+\sqrt{2})}$,
$-2\sqrt{-2+\sqrt{(8-\sqrt{2})}}$, $-2\sqrt{-2-\sqrt{(8-\sqrt{2})}}$.

XLIV.

Soit présentement l'équation

$$z^4 - 18z^2 + z + 70 = 0,$$

Septieme exemple. qui donne la réduite $x^6 - 36x^4 + 44x^2 - 1 = 0$, ou $u^3 - 388u - 2929 = 0$, en faisant évanouir le second terme par la supposition de $x^2 = u + 12$.

Or, comme cette équation a ses trois racines réelles, et que le second terme $36x^4$

est négatif, tandis que le troisieme $44x^2$ est positif, il s'ensuit, par l'article XXXII, que la proposée a ses quatre racines réelles. De plus la réduite n'ayant aucun diviseur commensurable, ainsi qu'on peut s'en assurer par la méthode des articles XII et XIII de la troisieme partie, il faut se contenter de trouver par approximation les racines cherchées.

Pour cela, on commencera par employer la méthode de l'article XXI, à la résolution de l'équation $u^3 - 388u - 2929 = 0$, et ayant trouvé 22, 74 pour la valeur de $u$, on la substituera dans l'équation $x = \sqrt{(u+12)}$, ce qui donnera 5,894 pour $x$; et en substituant cette valeur de $x$ dans

$$z = \pm \tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{(-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p \mp \tfrac{q}{2x})}$$

on aura pour les quatre racines cherchées..

$$+3,426, +2,468, -2,315, -3,579$$

qui seront fort proches des vraies : on en auroit eu de plus exactes, si on avoit poussé plus loin la méthode de l'article XXI pour résoudre l'équation $u^3 - 388u - 2929 = 0$.

## XLV.

Après avoir vu dans les résolutions des équations, tant du second que du troisieme et du quatrieme degré, comment, à l'aide des signes radicaux, on parvient à exprimer la valeur de l'inconnue dans ces équations, il peut venir dans l'esprit de chercher

par quelle opération on retrouveroit les équations qui auroient amené une expression radicale proposée. On peut se proposer, par exemple, de savoir qu'elle est l'équation dont la racine seroit $x=\sqrt[3]{(ab^3)}+\sqrt[3]{(a^2b)}+\sqrt[3]{(a^2c)}$, celle dans laquelle $x$ seroit..... $\sqrt[3]{(a^3+b^3)}-\sqrt[3]{(a^3-b^3)}$, etc.

Pour résoudre tous les problêmes de ce genre, ou, ce qui revient au même, pour faire évanouir les radicaux d'une équation quelconque, on s'y prendra de la maniere suivante, qui étoit bien aisée à imaginer, après ce qui a été enseigné dans la deuxieme partie, article XXXV.

Maniere de faire évanouir les radicaux d'une équation quelconque.

On mettra à la place de chaque radical une inconnue, et l'on aura, par ce moyen 1.° Au lieu de l'équation donnée, une nouvelle équation qui ne contiendra plus de radicaux; 2°. autant d'équations à deux termes qu'il y avoit de radicaux dans l'équation proposée. Or, chacune de ces équations à deux termes sera délivrée tout de suite de ses radicaux, en élevant ses deux membres à la puissance indiquée par l'exposant du signe radical que l'un de ses deux termes contiendra : donc il n'y aura plus qu'à chasser de toutes ces équations délivrées de radicaux les inconnues introduites, opération que l'on a enseignée à l'article XXXV de la seconde partie.

Exemple.

Pour éclaircir ce qu'on vient de dire par

un exemple, soit proposé de faire évanouir les radicaux de l'équation $x = \sqrt[3]{(ab^2)} + \sqrt[3]{(ad^2)}$. Ayant fait $\sqrt[3]{(ab^2)} = y$ et $\sqrt{(ad^2)} = z$, on aura les trois équations

$$x = y + z,\ y^3 = ab^2,\ z^3 = ad^2;$$

tirant de la première $y = x - z$, et la substituant dans la seconde, il viendra

$$x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - z^3 = ab^2,$$

de laquelle, avec le secours de l'équation $z^3 = ad^2$, il ne s'agit plus que de chasser $z$.

Pour cela, je commence par mettre dans la première de ces deux équations.....

$$x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - z^3 = ab^2,$$

à la place de $z^3$, $ad^2$ que donne la seconde, et elle devient $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - ad^2 = ab^2$, de laquelle je tire $z^2 = \frac{ad^2 + ab^2 - x^3 + 3xz}{3x}$ : multipliant ensuite les deux membres de cette équation par $z$, et mettant à la place de $z^3$ sa valeur $ad^2$, j'ai une nouvelle équation $ad^2 = \frac{ad^2z + ab^2z - x^3z + 3x^2zz}{3x}$, qui donne

$$zz = \frac{2ad^2x - ad^2z - ab^2z + x^3z}{3x^2}.$$

J'égale alors ces deux valeurs de $zz$, et j'en tire une équation où $z$ n'est plus qu'au premier degré, je la résous, et j'ai..... $z = \frac{x^4 + 2ad^2x - ab^2x}{ab^2 + ad^2 + 2x^3}$, qui étant substitué dans l'une des précédentes, par exemple, dans $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - ad^2 = ab^2$, donne enfin

l'équation $x^9 - 3ad^2x^6 - 3ab^2x^6 + 3a^2b^4x^3 + 3a^2d^4x^3 - 21a^2d^2b^2x^3 = a^3b^6 + 3a^3b^4d^2 + 3a^3d^4b^2 + a^3d^4$, qui ne contient d'autre inconnue que celle qui étoit dans la proposée, et qui est délivrée de toute quantité radicale. On se tireroit de la même maniere de quelque équation qu'on eût.

Quelquefois les équations proposées sont si aisées à délivrer des radicaux, qu'il est inutile d'avoir recours à la méthode précédente, et qu'il suffit de transposer les termes et d'élever les deux membres à la puissance indiquée par le radical qui est seul alors dans un des membres. Par exemple, si on avoit l'équation $x = y + \sqrt[3]{(a^3 + \sqrt{a^5 x})}$, en passant $y$ dans le premier membre, et élevant l'un et l'autre à la troisieme puissance, on aura une équation qui ne contiendra plus d'autre radical que $\sqrt{(a^5 x)}$. Mettant alors ce terme seul d'un côté et élevant les deux membres au quarré, on aura une équation qui ne contiendra plus de radicaux. Il en seroit de même dans beaucoup de rencontres.

*Fin de la seconde Partie.*

# NOTES
# D'ALGEBRE.

## *Règles des signes dans la soustraction et dans la multiplication.*

IL existe plusieurs démonstrations de la regle des signes, parmi lesquelles on distingue les suivantes, dues *au citoyen Laplace.*

Si de la quantité $a+b$ on avoit à retrancher $b$, il est évident qu'on auroit $a$ pour résultat : de même si $\pm a = \pm a + b - b$, on propose de retrancher $+b$, il vient pour reste

$$\pm a - b$$

et si de $\pm a = \pm a + b - b$ on ôte $-b$, le reste sera

$$\pm a + b$$

ce qui démontre la regle connue.

Si l'on a ..... $a-b$

à multiplier par..... $+b$

le produit doit être... $ab-ab$

parce que le multiplicande étant zéro, le produit doit être zéro, or le premier terme étant $+ab$, le second doit être $-ab$, pour satisfaire à cette condition ; donc

(1°.) .... $-a \times +b = -ab$.

Si l'on a..... $a$

à multiplier par ..... $b-b$

on trouvera, en faisant le même raisonnement, $ab-ab$ pour produit ; donc

(2°.) .... $+a \times -b = -ab$

Enfin si l'on multiplie $-a$

par ..... $b-b$

le premier terme du produit étant, d'après ce qu'on vient de démontrer, $-ab$, le second sera nécessairement $+ab$; en effet

$$-ab+ab=0$$

donc (3°.) ..... $-a\times-b=+ab$.

## *Démonstration du procédé pour faire la division algébrique.*

Les Auteurs élémentaires donnent, sans démonstration, la règle suivante :

*On ordonnera le dividende et le diviseur par rapport au plus haut exposant d'une même lettre, prise à volonté, c'est-à-dire, qu'on écrira pour premier terme tant au dividende qu'au diviseur, celui qui renferme le plus haut exposant de cette lettre, et à la suite tous les autres termes sous-ordonnés par rapport aux exposans successifs de la même lettre; puis divisant le premier terme du dividende par le premier du diviseur, on obtiendra un terme du quotient : ce terme trouvé, on le multipliera par tous ceux du diviseur, et on retranchera le produit du dividende. Cette première opération faite, on divisera celui des termes du dividende-reste, qui a le plus haut exposant, par le premier terme du diviseur, et on obtiendra un second terme du quotient; puis on procédera comme après la détermination du premier terme du quotient, et ainsi de suite.*

Nous allons exposer la démonstration de cette regle.

Soit..... $a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4$

à multiplier par. $a^3m+a^2m^2+am^3$

on aura pour produit

$a^7bm+a^6b^2m+a^5b^3m+a^4b^4m$.....(1)

$+a^6bm^2+a^5b^2m^2+a^4b^3m^2+a^3b^4m^2$.....(2)

$+a^5bm^3+a^4b^2m^3+a^3b^3m^3+a^2b^4m^3$.....(3)

On remarquera 1°. que dans ce produit il se trouvera un terme qui renferme la plus haute puissance de la lettre $a$;

2°. Que ce terme résulte du terme analogue du multiplicande par le terme (*) analogue du multiplicateur.

On tire de-là cette conclusion : Si après avoir écrit pour premier terme, tant au dividende qu'au diviseur, celui qui renferme le plus haut exposant de la même lettre $a$, dans l'exemple proposé, on divise l'un par l'autre, le résultat sera le terme du quotient qui renferme aussi la plus haute puissance de la même lettre.

Ainsi, dans cette exemple, le produit étant considéré comme un dividende, et le multiplicande comme un diviseur, on divisera $a^7bm$ par $a^4b$, ce qui donnera $a^3m$ premier terme du quotient.

Si dans un dividende quelconque proposé, on distinguoit, comme ici, tous les produits partiels numérotés (1), (2), (3), il y auroit plusieurs manières d'obtenir le premier terme du quotient :

1°. en divisant $a^7bm$ par $a^4b$, ce qui donneroit $a^3m$
2°. . . . . $a^6b^2m$ . . $a^3b^2$, . . . . . $a^3m$
3°. . . . . $a^5b^3m$ . . $a^2b^3$, . . . . . $a^3m$
4°. . . . . $a^4b^4m$ . . $ab^4$, . . . . . $a^3m$.

ou enfin, comme le produit partiel numéroté (1) est, en ne faisant qu'indiquer,

$$(a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4)\,a^3m$$

on obtiendra encore le même premier terme du quotient en divisant

$$(a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4)\,a^7m$$

par. . . . . $a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4$.

car $a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4$ étant un facteur commun au dividende et au diviseur, on l'effaceroit, et il viendroit

$$\frac{a^3m}{1} = a^3m$$

quotient trouvé plus haut.

Il est donc démontré que pour obtenir le premier terme

(*) J'entends par termes analogues du multiplicande et du multiplicateur ceux qui renferment la plus haute puissance de la même lettre $a$.

du quotient, il suffit de diviser l'un par l'autre les termes du dividende et du diviseur qui renferment la plus haute puissance d'une même lettre.

D'où l'on peut conclure encore que la division de ces deux termes équivaut à celle par le diviseur entier de la partie du dividende qui résulte du produit du diviseur par le premier terme du quotient, ou, pour notre exemple, de la ligne n°. (1) par le multiplicande pris pour diviseur.

Donc à cette dernière division qu'on devroit réellement faire, mais qui n'est pas possible, on peut substituer la première qui l'est toujours, et qui, de plus donne le même résultat.

Ceci fait, on multipliera tout le diviseur par ce premier terme du quotient, et le produit représentera la partie du dividende, qui a réellement été divisée par le diviseur, d'après ce que nous venons de remarquer; on soustraira ensuite ce produit du dividende, ce qui détruira la ligne n°. (1), dans notre exemple, ou son analogue dans un autre.

Passons à la recherche du second terme du quotient.

On remarquera que de tous les termes du dividende restant, celui qui renferme le plus haut exposant de la lettre choisie, ne peut résulter que du terme analogue du multiplicande par le terme de second ordre du multiplicateur qui est le quotient; il pourroit bien aussi venir du terme de second ordre (*) du multiplicande, multiplié par le terme de premier ordre du multiplicateur; mais celui-ci se trouve dans le premier dividende partiel, qui est effacé.

Donc pour obtenir le deuxième terme du quotient, on divisera le terme de plus haut exposant dans le dividende restant par le premier terme du diviseur toujours ordonné de la même manière, et le résultat sera le second terme du quotient.

Il y auroit, comme pour le premier terme, diverses manières de le trouver, mais elles sont presque toujours impraticables.

Ce second quotient trouvé, on le multipliera par tout le diviseur, ce qui donnera, dans notre exemple, la ligne n°. (2) ou son analogue dans toutes les divisions.

De tous les termes du dividende restant, celui qui a le plus haut exposant de la lettre choisie, est toujours donné

(*) J'entends par terme de deuxième ordre celui qui renferme la puissance de la lettre choisie, immédiatement inférieure à la plus haute.

par la multiplication du terme de premier ordre du multiplicande par le terme de troisième ordre du multiplicateur. Ce même terme pourroit bien aussi, quant à la dimension de $a$, résulter du troisième terme du multiplicande par le premier du multiplicateur, ou du deuxième du multiplicande par le deuxième du multiplicateur ; mais si l'on considère que ces deux dernières combinaisons se trouvent dans les deux premiers dividendes partiels déjà effacés, on verra qu'on ne peut faire un mauvais choix en prenant celui des termes du dividende restant, qui renferme le plus haut exposant, et le divisant toujours par le premier terme du diviseur, division dont le résultat sera le troisième terme du quotient : par ce troisième terme, ainsi trouvé, on multipliera le diviseur, ce qui rendra la ligne n°. (3) ou son analogue dans une autre division.

On voit que la série de ces procédés fournit l'énoncé de la regle prescrite.

Dans l'exemple sur lequel nous avons raisonné, le terme qui renferme la plus haute puissance de la lettre $a$ étoit unique ; mais on conçoit qu'il peut être multiple, ce qui seroit arrivé dans la division précédente, si l'on eût ordonné par rapport à la lettre $b$.

Le cas analogue sera fourni par la multiplication de

$$a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4$$

par.....$a^2m+a^2n+am^2+an^2$

dont le produit est

$$\left\{\begin{array}{l} a^6bm+a^5b^2m+a^4b^3m+a^3b^4m \quad \ldots\ldots (1) \\ +a^6bn+a^5b^2n+a^4b^3n+a^3b^4n \quad \ldots\ldots (2) \\ +a^5bm^2+a^4b^2m^2+a^3b^3m^2+a^2b^4m^2 \quad \ldots\ldots (3) \\ +a^5bn^2+a^4b^2n^2+a^3b^3n^2+a^2b^4n^2 \quad \ldots\ldots (4) \end{array}\right.$$

Nous supposerons d'abord qu'on propose de diviser le produit par le multiplicande.

Dans ce cas, après avoir ordonné le devidende et le diviseur par rapport à la plus haute puissance de la lettre $a$, ce qui donnera au dividende deux termes de plus haut exposant, on commencera indifféremment la division par rapport à l'un ou à l'autre de ces deux termes.

En effet, si c'est

$a^6bm$ qu'on divise par $a^4b$, on aura pour quotient $a^2m$

$a^6bn$ . . . . . $a^4b$, . . . . . $a^2n$

aussi l'ordre dans lequel se présentent ces deux termes du

quotient doit-il être indifférent, puisqu'ils sont de même exposant par rapport à la lettre $a$.

L'un ou l'autre de ces termes trouvé, on le multiplie par le diviseur, ce qui donne une des deux lignes (1) ou (2), puis on fait la soustraction, ce qui efface l'une des deux lignes.

Cela fait, on trouve le second terme du quotient de même dimension en $a$ que le précédent, en divisant le terme de même ordre du dividende par le premier terme du diviseur.

Alors l'opération se continue, comme dans l'exemple précédent.

On étendroit aisément ce que nous venons de dire au cas où les termes du plus haut exposant, dans le dividende, seroient en nombre quelconque.

Nous supposerons, pour deuxième cas, qu'on prenne le multiplicateur pour diviseur, en conservant toujours l'hypothèse que les termes de plus haut exposant soient multiples.

On commencera toujours par ordonner le dividende et le diviseur; ceci fait, on choisira parmi les termes du même ordre du dividende celui qui est exactement divisible par celui qu'on a écrit le premier au diviseur; ou, plus généralement, on prendra dans les termes de premier ordre du dividende et du diviseur deux termes qui se divisent exactement. Ainsi, dans notre exemple, on divisera.

$a^6bm$ par $a^3m$, ce qui donnera $a^4b$.

ou..... $a^6bn$..... $a^3n$, ..... $a^4b$.

La raison de ce procédé est que si l'on divisoit $a^6bm$ par $a^3n$, on auroit $\frac{a^6bm}{n}$ qui ne fait pas partie du multiplicande.

Ce quotient obtenu, on le multipliera par tout le diviseur, puis on fera la soustraction; mais on remarquera que, dans ce cas la soustraction efface les deux termes de plus haut exposant, plus les termes $a^5bm^2$ et $a^5bn^2$.

Cette première opération faite, le reste de la division se pratique comme à l'ordinaire.

On généraliseroit aisément ce que nous venons de dire pour l'adapter à l'hypothèse d'un nombre quelconque de termes de même ordre dans l'un des deux facteurs.

Il resteroit à supposer que les deux facteurs renferment

plusieurs termes de même exposant par rapport à la lettre $a$, comme si l'on avoit

$$a^4b+a^4c+a^2b^3+ab^4$$

à multiplier par.. $a^2m+a^2n+am^2+an^2$

$$\text{produit} = \begin{cases} a^6bm+a^5bm^2+a^4b^3m+a^3b^4m \\ +a^6cm+a^5cm^2+a^4b^3n+a^3b^4n \\ +a^6bn+a^5bn^2+\quad +a^3b^3m^2+a^2b^4m^2 \\ +a^6cn+a^5cn^2+\quad +a^3b^3n^2+a^2b^4n^2 \end{cases}$$

Le multiplicande est pris pour diviseur.

On chercheroit parmi les quatres termes de plus grand exposant dans le dividende, ceux (*) qui sont exactement divisibles par celui qu'on a écrit le premier au diviseur; on divise alors l'un quelconque de ceux-là par le premier terme du diviseur, ce qui donne un terme du quotient, qu'on multiplie par le diviseur; puis l'on fait la soustraction qui efface ceux des deux termes de plus haut exposant, qui sont exactement divisibles, plus les termes $a^4b^3m$ et $a^3b^4m$.

On se conduiroit d'une manière analogue pour trouver un second terme du quotient.

En se rendant familiers les préceptes que nous venons de poser pour tous les cas de la division, on ne rencontrera dans cette opération aucune difficulté qu'on ne puisse surmonter.

## *Observations sur la méthode du plus grand commun diviseur.*

On a été conduit au procédé connu pour obtenir le plus grand commun diviseur de deux nombres ou de deux polynomes, par l'opération graphique pour trouver la commune mesure entre deux lignes, lorsqu'elles sont commensurables: si on a deux lignes $A$ et $B$ dont $B$ soit la plus

(*) Je dis ceux, parce que, dans ce cas, il y en a toujours plusieurs qui jouissent de cette propriété: dans notre exemple, chacun des deux termes $a^6bm$, $a^6bn$ est exactement divisé par $a^4b$.

petite, on mesure $A$ avec $B$, ce qui donne un reste $R$, puis on mesure $B$ avec $R$ et en supposant un reste $R'$, on porte $R$ sur $R'$; et si $R$ contient exactement $R'$, alors $R'$ est la commune mesure exacte des deux lignes $A$ et $B$: car d'abord $R'$ mesure $nR + R' = B$, $n$ indiquant le nombre de fois que $R$ est exactement dans $B$; donc il mesure aussi $n'B + R = A$, $n'$ désignant le rapport, en nombre rond, entre $A$ et $B$. On apperçoit facilement ici que $R'$ est la plus grande commune mesure des deux lignes $A$ et $B$.

Mais si au-lieu de porter le premier reste sur $B$, le second reste sur le premier et ainsi de suite, on mesure tous les restes sur la ligne $A = 1$, en prenant toujours un quotient plus grand d'une unité que le véritable, ce qui donne des restes négatifs, on aura, en désignant les restes par $R, R', R'', R'''$ etc., et les quotiens successifs par $q, q', q'', 'q''$ etc., cette suite d'équations

$$1 = qB - R$$
$$1 = q'R - R'$$
$$1 = q''R' - R''$$
etc.

d'où l'on tire

$$B = \frac{1+R}{q}$$
$$R = \frac{1+R'}{q'}$$
$$R' = \frac{1+R''}{q''}$$
etc.

et enfin

$$B = \frac{1}{q} + \frac{1}{qq'} + \frac{1}{qq'q''} + \frac{1}{qq'q''q'''}, \text{ etc.}$$

série infinie, si $A$ et $B$ sont incommensurables.

Soient

$$q = 1; q' = 2; q'' = 3; q''' = 4, \text{ etc.}$$

on aura

$$B = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

donc

$$1+B=1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

Cette série représente la base des logarithmes hyperboliques, ou le nombre $e$, comme on le verra dans la suite.

*Tout nombre premier qui ne divise ni l'un ni l'autre des facteurs A et B, ne peut diviser leur produit AB.*

Soit, s'il est possible, $\theta$ un nombre premier qui ne divise ni $A$ ni $B$, mais qui divise le produit $AB$; on pourra toujours supposer qu'en divisant $A$ par $\theta$, on ait le quotient $m$ qui sera zéro si $A$ est $< \theta$ et le reste $A'$; on aura donc $A=m\theta+A'$ et semblablement $B=n\theta+B'$; donc $AB=mn\theta^2+nA'\theta+mB'\theta+A'B'$. Cette quantité, d'après l'hypothèse, doit être divisible par $\theta$, et comme la partie $mn\theta^2+nA'\theta+mB'\theta$ se devise d'elle-même par $\theta$, il faudra que l'autre partie $A'B'$ soit également divisible par $\theta$.

Dans ce premier résultat, nous remarquerons, 1°. que $A'$ et $B'$ ne peuvent être zéro, parce que $A$ et $B$ sont supposés non divisibles par $\theta$; 2°. que $A'$ et $B'$ étant des restes de division sont moindres que le diviseur $\theta$; 3°. qu'aucun des deux nombres $A'$ et $B'$ ne peut être égal à l'unité; car si l'on avoit $A'=1$, le produit $A'B'$ deviendroit $B'$; or $B'$ étant $<\theta$, il est impossible que $B'$ soit divisible par $\theta$.

Nous avons donc deux nombres entiers $A'$ et $B'$, tous deux plus grands que l'unité, et tous deux moindres que $\theta$, dont le produit est divisible par $\theta$, de sorte qu'on a $A'B'=\theta C'$.

Voyons les conséquences qui en résultent.

Puisque $A'$ est moindre que $\theta$, on peut diviser $\theta$ par $A'$; soit $m'$ le quotient et $A''$ le reste, on aura $\theta=m'A'+A''$. Donc $\theta B'=m'\times A'\times B'+A''\times B'$ : le premier membre est divisible par $\theta$, il faut donc que le second le soit aussi : mais la partie $m'\times A'\times B'$ est divisible d'elle-même par $\theta$, puisque $A'B'=C'\theta$; donc l'autre partie $A''B'$ doit être encore divisible par $\theta$.

Le nombre $A''$ qui est un reste de division, est moindre que le diviseur $A'$; il ne peut d'ailleurs être zéro, car dans cette hypothèse, $\theta$ seroit divisible par $A'$ et ne seroit

plus un nombre premier. Donc du produit $A'B'$, supposé divisible par $\theta$, on tirera un autre produit $A''B'$ divisible encore par $\theta$, lequel est plus petit que $A'B'$ et cependant n'est pas zéro.

En suivant le même raisonnement, on déduira du produit $A''B'$ un autre produit $A'''B'$ ou $A''B''$ encore plus petit, et qui sera toujours divisible par $\theta$ sans être zéro.

Et en continuant la suite de ces produits décroissants, on parviendra nécessairement à un nombre moindre que $\theta$. Or il est impossible qu'un nombre moindre que $\theta$ et qui n'est pas zéro, soit divisible par $\theta$; donc l'hypothèse d'où l'on est parti est impossible.

Donc si les nombres $A$ et $B$ ne sont divisibles ni l'un ni l'autre par le nombre premier $\theta$, leur produit $AB$ ne pourra non plus être divisible par $\theta$.

Cette proposition est extraite de *la théorie des nombres du citoyen Legendre*.

On en peut conclure que si la fraction $\frac{b}{a}$ est irréductible, les fractions $\frac{b^2}{a}$ ou $\frac{b^2}{a^2}$ le seront aussi. En effet la fraction $\frac{b}{a}$ étant irréductible, il n'y a aucun nombre premier qui divise en même tems $b$ et $a$, et comme il suit de la démonstration précédente que tout nombre premier qui ne divise pas $b$ ne divise pas $b \times b$ ou $b^2$, il devient évident que les fractions $\frac{b^2}{a}$ et $\frac{b^2}{a^2}$ n'ont aucun facteur commun, et quelles sont irréductibles, on prouveroit de même que les fractions $\frac{b^m}{a}$ ou $\frac{b^m}{a^m}$ le sont aussi lorsque $b$ et $a$ n'ont aucun facteur commun. Il suit de-là que les racines de nombres qui ne sont pas des puissances parfaites sont incommensurables, puisque ces quantités ne pouvant être représentées ni par des entiers ni par des fractions, n'ont aucune mesure commune avec l'unité.

## *Démonstration du binome de Newton, dans le cas de l'exposant entier.*

Les remarques sur la forme des produits des facteurs

$x+a$, $x+b$, $x+c$, etc. sont évidentes à l'inspection même de ces produits, toutes les fois qu'on prendra un nombre limité de facteurs. On peut prouver que la forme de ces produits doit rester soumise à la même loi, quelque soit leur nombre.

Si on représente par

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}\ldots\ldots\ldots+V$$

le produit d'un nombre quelconque $m$ des facteurs, $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, etc. et qu'on le multiplie par un nouveau facteur $x+l$, il viendra

$$x^{m+1}+Px^m+Qx^{m-1}+Rx^{m-2}\ldots\ldots+Yx$$
$$+lx^m+Plx^{m-1}+Qlx^{m-2}\ldots\ldots\ldots+lV.$$

Il est évident 1°. que si $P$ est la somme des $m$ seconds termes $a$, $b$, $c$, $d$, etc., $p+l$ sera celle des $m+1$ seconds termes $a$, $b$, $c$, $d$, etc., $l$, et par conséquent la composition assignée à ce coefficient sera vraie pour le produit du degré $m+1$, si elle est vraie pour le produit du degré $m$.

2°. Si $Q$ est la somme des produits des $m$ quantités $a$, $b$, $c$, $d$, etc., prises deux à deux, $Q+lP$ exprimera celle des produits de $m+1$ quantités $a, b, c, d$, etc. $l$ prises aussi deux à deux; car $P$ étant la somme des premières, $lP$ sera celle de leurs produits par la nouvelle quantité introduite $l$; donc la composition assignée sera vraie pour le degré $m+1$, si elle l'est pour le degré $m$.

3°. Si $R$ est la somme des produits des $m$ quantités $a$, $b$, $c$, $d$, etc. $l$, prises trois à trois, $R+lQ$ sera celle des produits des $m+1$ quantités, $a$, $b$, $c$, $d$, etc. $l$ prises aussi trois à trois, puisque $lQ$, d'après ce qui précède, exprimera la somme des produits des premières prises deux à deux, et multipliée par la nouvelle quantité introduite $l$; donc la composition assignée sera vraie pour le degré $m+1$, si elle a lieu pour le degré $m$.

On voit que cette manière de raisonner s'étend à tous les termes, et que le dernier $lV$ sera le produit des $m+1$ seconds termes des binomes.

Les remarques énoncées étant vraies pour le produit du quatrième degré, par exemple, le seront, suivant ce qu'on vient de voir, pour celui du cinquième, pour celui du

sixième, et en s'élevant ainsi de degré en degré, elles seront entièrement prouvées.

En supposant les seconds termes des $m$ facteurs, $x+a$, $x+b$, etc. égaux entre eux, le produit devient la puissance $m$ du binome $(x+a)$, il prendra la forme

$$x^m + max^{m-1} + Aa^2x^{m-2} + Ba^3x^{m-3} + \text{etc.}$$

Les coefficients $A$, $B$, $C$, représentant le nombre de produits différents que l'on peut former avec $m$ lettres prises deux à deux, trois à trois, etc.

La recherche des coefficients du développement du binome $(x+a)^m$ se réduit à cette question.

*Etant donné un nombre m de lettres, déterminer combien il peut en résulter de produits différens composés de n lettres.*

La solution de cet énoncé est comprise dans les trois problêmes qui suivent.

## *Probléme I^er.*

*Déterminer combien avec m lettres, on peut former d'arrangemens différens.*

Si l'on avoit formé tous les arrangemens possibles de $m-1$ lettres pour obtenir ceux de $m$ lettres, il faudroit introduire dans chaque arrangement, la nouvelle lettre à toutes les places possibles; on pourroit la placer avant la première, avant la seconde, etc., avant et après la dernière; un terme composé de $m-1$ lettres, en donneroit donc $m$ composés de $m$ lettres; ainsi en représentant par $x$ le nombre des arrangemens que donnent $m$ lettres et par $x'$ celui des arrangemens de $m-1$ lettres, on aura l'équation

$$x = mx'$$

Cette équation a lieu quel que soit la valeur de $m$, ainsi en représentant par $x''$, $x'''$, $x^{(m-1)}$ le nombre des arrangemens de $m-2$, $m-3$, ..... $m-(m-1)$ lettres, on aura

$$x' = (m-1)x''$$
$$x'' = (m-2)x'''$$
etc.

$$x^{(m-1)} = m-(m-1)$$

car une lettre ne peut donner qu'un seul arrangement. En substituant pour $x^{(m-1)}$, $x^{(m-2)}$ etc. leurs valeurs dans les équations précédentes, on aura

$$x = m.\ m-1.\ m-2.\ m-3.\ldots\ldots m-(m-1).$$

## *Problême II^eme.*

*Etant données m lettres a, b, c, d, etc. déterminer le nombre des arrangemens qui en peuvent résulter en ne faisant entrer que n lettres dans chaque arrangement.*

Soient $y$ le nombre cherché, $y'$ le nombre des arrangemens de $m-1$ lettres prises $n-1$ à $n-1$, nous chercherons comme dans la question précédente à faire dépendre $y$ de $y'$. En plaçant la lettre $a$ devant chacun des arrangemens des $m-1$ autres lettres prises $n-1$ à $n-1$, on auroit tous les arrangemens de $n$ lettres dans lesquels la lettre $a$ occuperoit la première place, et le nombre de ces termes seroit $y'$ : de même en plaçant la lettre $b$ devant chacun des arrangemens formés avec les $m-1$ autres lettres $a$, $c$, $d$, etc. prises aussi $n-1$ à $n-1$, on auroit tous les arrangemens de $n$ lettres, dans lesquels la lettre $b$ occuperoit la première place, ce qui donneroit encore $y'$ termes. En faisant le même raisonnement pour chacune des lettres $c$, $d$, etc. on auroit à chaque fois $y'$ termes, donc puisque le nombre des lettres est $m$, on auroit en tout $my'$ termes, ainsi on aura comme dans la question précédente

$$y = my'$$

En représentant par $y''$ $y'''$, etc. le nombre des arrangemens de $(m-2)$ lettres prises $n-2$ à $n-2$, de $m-3$ lettres prises $n-3$ a $n-3$, etc. on aura ces équations.

$$y' = (m-1)y''$$
$$y'' = (m-2)y'''$$
etc.

Si l'on représente par $y^{(n-1)}$ le nombre des arrangemens que donnent $m-(n-1)$ lettres prises $n-(n-1)$ à $n-(n-1)$ ou une à une, on aura évidemment

$$y^{(n-1)} = m-(n-1).$$

et en substituant dans les équations précédentes, jusqu'à la première, on trouvera

$$y = m.\ m-1.\ m-2.\ m-3 \ldots . m-(n-1)$$

On peut déduire de cette formule le nombre des arrangemens de $m$ lettres, en les faisant entrer toutes dans chaque arrangement : il suffit d'y faire $m=n$, ce qui donne

$$y = x = m.\ m-1.\ m-2 \ldots\ldots 1.$$

## *Problême III^eme.*

*Etant données m lettres, déterminer combien elles donnent de produits différens composés de n lettres.*

Si ces produits étoient connus, en donnant aux lettres qui entrent dans chaque terme toutes les dispositions possibles, on auroit tous les arrangemens de $m$ lettres prises $n$ à $n$. Puisque chaque produit est composé de $n$ lettres, pour un terme, on auroit $1.2.3\ldots\ldots n$ arrangemens, donc si l'on représente par $P$ le nombre des produits différents, on aura

$$P\,(1.2.3.4\ldots . n) = m.\ m-1\ m-2\ldots .\ m-(n-1)$$

d'où l'on tire

$$P = \frac{m.m-1.\ m-2\ldots\ldots m-(n-1)}{1.2.3.4\ldots\ldots n}$$

Tous les cas particuliers se déduisent facilement de cette formule; en y faisant $n=1$, on a le coefficient du second terme $= m$

En faisant $n=2$, on obtient le coefficient du 3^e. terme $= m.\frac{m-1}{2}$

etc.

Pour le dernier il faudroit faire $n=m$, ce qui donnne $P=1$.

Un terme quelconque du développement du binome $(x+a)^m$ sera donc représenté par la formule

$$\frac{m.}{1}\ \frac{m-1}{2}\ \frac{m-2}{3}\ \ldots\ldots\ \frac{m-(n-1)}{n}\ x^{m-n}a^n$$

Le terme suivant sera

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\ldots\ \frac{m-(n-1)}{n}\cdot\frac{m-n}{n+1}\ x^{m-(n+1)}\ a^{n+1}$$

En divisant la seconde formule par la première, on obtiendra le rapport entre deux termes consécutifs, ce rapport est $\frac{m-n}{n+1}\frac{a}{x}$ ; il indique de quelle manière chaque terme se déduit du précédent.

Il nous reste à démontrer que dans le développement de $(x+a)^m$ deux termes également distants des termes extrêmes ont même coefficient numérique. Prenons, à cet effet, le terme qui a pour coefficient

$$\frac{m.m-1.m-2.\ldots\ldots\ldots m-(n-1)}{1.2.3.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n}$$

ce terme sera le $(n+1)^{eme.}$ à partir du premier inclusivement, c'est-à-dire, qu'il y aura $n$ intervals entre le premier terme et celui qu'on considère; le nombre total des termes étant $m+1$, puisque l'exposant du binome est $m$, le terme placé à $m-n$ intervals du premier et conséquemment à $n$ intervals du dernier, aura pour coefficient numérique

$$\frac{m.m-1.m-2.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m-(m-n-1)}{1.2.3.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m-n}$$

$$=\frac{m.m-1.m-2.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n+1}{1.2.3.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m-n}$$

il s'agit donc de démontrer qu'on doit avoir

$$\frac{m.m-1.m-2.\ldots\ldots m-(n-1)}{1.2.3.\ldots\ldots\ldots n}=\frac{m.m-1.m-2.\ldots\ldots n+1}{1.2.3.\ldots\ldots\ldots m-n}$$

ou après avoir fait disparoître les dénominateurs, que

$$(1.2.3.\ldots\ldots m-n)(m.m-1.\ldots\ldots m-(n-1))=$$
$$(1.2.3.\ldots\ldots\ldots n)(m.m-1.\ldots\ldots\ldots n+1)$$

or le premier membre est le produit de la suite des nombres naturels depuis $m$ jusqu'à $m-(n-1)$, multiplié par la suite des nombres naturels depuis $m-n$ jusqu'à l'unité, ou le produit de tous les nombres naturels depuis 1 jusquà $m$ inclusivement, le second membre offre le même produit, donc etc.

On serait parvenu plus brièvement à cette conclusion en observant 1°. que le développement du binome $(a+x)^m$

reste le même en changeant $x$ en $a$ et réciproquement; 2°. que les coefficients ne dépendent que de l'exposant et de nombres, d'où résulte nécessairement qu'à partir des deux termes extrêmes les coefficients des termes de même rang doivent être les mêmes.

Nous avons donc démontré cette formule.

$$(x+a)^m = x^m + mx^{m-1}a + \frac{m.m-1}{1.2}x^{m-2}a^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}x^{m-3}a^3 + \text{etc.}$$

et conséquemment

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m.m-1}{1.2}x^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}$$

Si on ordonne ce développement par rapport aux puissances de $m$, ce qui se fera en effectuant les opérations indiquées dans les coefficients et qu'on représente par $B$, $C$, etc. les facteurs de $m^2$, $m^3$, etc. dans le nouveau développement, on aura

$$(1+x)^m = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.} \Big\} m + Bm^2 + Cm^3 + \text{etc.}$$

faisons

$$A = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}$$

et examinons ce que deviennent, en même tems, $(1+x)^m$ et $mA$, lorsqu'on attribue une suite de valeurs à $m$,

| | | |
|---|---|---|
| à $m = 0$ correspondent | $(1+x)^0$ et | $0A$ |
| $m = 1$ . . . . . | $(1+x)^1$ . . | $1A$ |
| $m = 2$ . . . . . | $(1+x)^2$ . . | $2A$ |
| $m = 3$ . . . . . | $(1+x)^3$ . . | $3A$ |
| etc. | etc. | etc. |

donc

donc

$$A = log.\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \text{etc.}$$

formule qui sert à calculer le logarithme du nombre représenté par $(1+x)$. Au reste nous reviendrons sur cette question dans la suite de ces notes.

## *Transformation d'une fraction* $\frac{B}{A}$.

Si on divise 1°. $A \times m$ par $B$, que le quotient soit $q$ et le reste $R$; 2°. $A \times n$ par $R$, que le quotient soit $q'$ et le reste $R'$; 3°. $A \times p$ par $R'$, que le quotient soit $q''$ et le reste $R''$ et ainsi de suite, on aura

$$\left.\begin{aligned} B \times q + R &= A \times m \\ R \times q' + R' &= A \times n \\ R' \times q'' + R'' &= A \times p \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{aligned} \frac{B}{A} &= \frac{m}{q} - \frac{R}{Aq} \\ \frac{R}{A} &= \frac{n}{q'} - \frac{R'}{Aq'} \\ \frac{R'}{A} &= \frac{p}{q''} - \frac{R''}{Aq''} \end{aligned}\right.$$

etc. etc.

donc

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= \frac{m}{q} - \frac{R}{Aq} \\ &= \frac{m}{q} - \frac{n}{qq'} + \frac{R'}{Aq'} \\ &= \frac{m}{q} - \frac{n}{qq'} + \frac{p}{qq'q''} - \frac{R''}{Aqq'q''} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

et faisant les substitutions indéfiniment

$$\frac{B}{A} = \frac{m}{q} - \frac{n}{qq'} + \frac{p}{qq'q''} - \frac{r}{qq'q''q'''} + \text{etc.}$$

Dans le cas de $m = n = p = q$ etc. $= 1$, il vient

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{q} - \frac{1}{qq'} + \frac{1}{qq'q''} - \frac{1}{qq'q''q'''} + \text{etc.}$$

Dans la suite nous déduirons des conséquences remarquables du développement précédent.

## *Résolution de l'équation générale du second degré.*

L'équation

$$x^2 + px = q$$

peut représenter toutes celles du second degré : en ajoutant aux deux membres la quantité $\frac{p^2}{4}$, elle devient

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = q + \frac{p^2}{4}$$

Par cette addition le premier membre est le quarré parfait de $x + \frac{p}{2}$ ; extrayant donc la racine de part et d'autre, on a

$$x + \tfrac{1}{2}p = \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$$

Mais on observera que la racine quarrée d'un nombre peut être également affectée du signe + ou du signe — ; car le quarré de $-a$ est le même que celui de $+a$, et comme, en général, rien n'indique celui des deux signes avec lequel on doit prendre la racine, on posera

$$x + \tfrac{1}{2}p = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

équation qui ne renferme plus $x$ qu'au premier degré et de laquelle on tire

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

On a donc pour $x$ deux valeurs différentes, suivant que l'on prend le signe + ou le signe —, et on peut s'assurer que chacune de ces valeurs satisfait également à la question proposée.

On peut encore se convaincre de la manière suivante que dans l'équation du second degré l'inconnue admet deux valeurs.

Après avoir rendu le premier membre un quarré parfait, en ajoutant de part et d'autre le quarré de la moitié du coefficient du second terme, on peut considérer le second membre $\frac{p^2}{4} + q$ comme le quarré parfait de $\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$

et faisant passer $\frac{p^2}{4}+q$ dans le premier, l'équation deviendra

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}+q\right)=0$$

Mais on sait que la différence de deux quarrés est égale à la somme des racines multipliée par leur différence, ce qui resulte de la multiplication de $a+b$ par $a-b$, on peut donc écrire

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}+q\right)=$$

$$\left\{x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}\right\}\left\{x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}\right\}=0$$

Il ne s'agit plus que de trouver pour $x$ une valeur telle que le produit soit égal à zéro ; or un produit composé de deux facteurs devient nul en égalant l'un ou l'autre de ces facteurs à zéro. Ainsi l'équation sera également satisfaite en supposant

$$x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}=0 \text{ ou } x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}=0$$

ce qui donne pour $x$ les deux valeurs

$$x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

et

$$x=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

En donnant à l'équation

$$x^2+px-q=0.$$

la forme

$$\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}\right)=0$$

on voit que le premier membre est divisible par l'inconnue moins sa valeur. Cette propriété s'étend aux équations de degré quelconque ; elle est la base de la résolution des équations numériques.

En représentant par $x'$ et $x''$ les deux racines de l'équation du second degré, on a

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

$$x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

ajoutant ces deux équations, on trouve

$$x' + x'' = -p$$

ou en changeant les signes

$$p = -(x' + x'')$$

Ainsi dans l'équation

$$x^2 + px - q = 0$$

le coefficient du second terme est égal à la somme des racines, prise en signe contraire.

En substituant au lieu de $p$ sa valeur $-(x'+x'')$ dans l'équation

$$x'^2 + px' - q = 0$$

on a

$$x'^2 - x'(x' + x'') - q = 0$$

ou

$$x'^2 - x'^2 - x'x'' - q = 0$$

d'où l'on tire

$$-q = x'x''$$

Ce résultat nous fait voir que le terme tout connu est égal au produit des deux racines.

La formule

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

qui représente les deux racines de l'équation du second degré, prend différentes formes suivant la relation qui existe entre $p$ et $q$.

Si $\frac{p^2}{4} + q$ est un quarré parfait, les deux valeurs de $x$ seront commensurables. Il est clair qu'elles ne peuvent l'être que dans ce cas, à moins que l'on ait $q$ négatif sous le radical et égal à $\frac{p^2}{4}$, parce qu'alors les deux ra-

cines se réduisent à $-\frac{p}{2}$, et le premier membre devient un quarré parfait.

Lorsque $\frac{p^2}{4}+q$ n'est pas un quarré parfait, les racines sont incommensurables, et on conclut de-là que le problème n'a pas de solution numérique exacte ; mais alors on peut toujours trouver deux nombres aussi approchés qu'on voudra des racines de la proposée.

Il faut surtout remarquer le cas où l'on a $\frac{p^2}{4}+q<0$, ce qui a lieu lorsque $q$ est négatif dans le second membre et plus grand que $\frac{p^2}{4}$ : on est alors conduit à extraire la racine quarrée d'une quantité négative.

Le problème qui conduit à ces valeurs est impossible, car un nombre réel positif ou négatif ne peut avoir pour quarré un nombre négatif.

Ces racines qu'on nomme imaginaires peuvent se mettre sous la forme d'une quantité réelle augmentée ou diminuée d'une autre quantité réelle multipliée par $\sqrt{-1}$.

En effet, soit

$$\frac{p^2}{4}+q=-m$$

les deux valeurs de $x$ deviendront

$$-\frac{p}{2}\pm\sqrt{-m}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{-1\times m}.$$

$$=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{m}\sqrt{-1}$$

On voit qu'à cause du double signe $\pm$ dont le radical doit être affecté, la racine imaginaire est double, ensorte que les racines d'une équation du second degré sont ou toutes deux réelles ou toutes deux imaginaires.

Pour mieux connoître en quoi consiste l'absurdité des questions qui conduisent à des racines imaginaires, proposons-nous le problème suivant :

Partager un nombre $p$ en deux parties dont le produit soit égal à $q$.

En désignant l'une de ces parties par $x$, l'autre sera exprimée par $p-x$, et leur produit sera $px-x^2$ : on

aura donc $px-x^2=q$, ou changeant les signes $x^2-px=-q$. Cette équation renferme toutes celles dont les racines peuvent être imaginaires : en la résolvant, on trouve

$$x=+\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{p^2}{4}-q}$$

valeurs qui seront réelles tant que $\frac{p^2}{4}$ sera plus grand que $q$, c'est-à-dire tant que le quarré de la moitié du nombre à partager sera plus grand que le produit qu'on exige des deux parties qui le composent.

Or de quelque manière qu'on partage le nombre donné, les deux parties pourront être représentées par $\frac{p}{2}+d$ et $\frac{p}{2}-d$ dont le produit est

$$\left(\tfrac{p}{2}+d\right)\left(\tfrac{p}{2}-d\right)=\tfrac{p^2}{4}-d^2$$

Ce produit sera donc moindre que $\frac{p^2}{4}$, à moins que la quantité $d$ ne soit égale à zéro, auquel cas chacune des parties étant $\frac{p}{2}$, leur produit sera $\frac{p^2}{4}$; il est donc absurde de demander que ce produit soit plus grand que $\frac{p^2}{4}$ et l'algebre avertit que ce qu'on cherche n'existe pas.

Lorsque $\frac{p^2}{4}$ sera plus grand que $q$, les racines de l'équation

$$x^2+px+q=0$$

seront réelles, et il sera toujours possible, à l'inspection des signes des coefficiens, de reconnoître si elles sont positives ou négatives.

$q$ étant égal au produit des deux racines, elles seront de même signe lorsque $q$ sera positif, et comme $p$ est égal à leur somme prise en signe contraire, elles seront toutes deux positives ou toutes deux négatives, suivant que $p$ sera négatif ou positif.

Si $q$ est négatif, les racines seront de signes différens et la racine positive sera plus petite ou plus grande que la racine négative, suivant que $p$ sera positif ou négatif.

## *De la méthode des coefficiens indéterminés.*

Si on divise 1 par $1-x$, on trouve

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \text{etc.}$$

égalité qu'on nomme *identité*, parce que le premier membre est une opération indiquée, tandis que le second en est le résultat. En général, on appelle *identité* toute égalité entre une fonction non développée et le développement de cette fonction. On pourroit de même obtenir par la division un développement de même forme pour toute fraction rationnelle ; mais lorsque les deux termes de la fraction sont composés, la division devient laborieuse, et la loi qui règne entre les coefficiens est plus cachée. On fait alors usage de la méthode qui suit : on suppose

$$\frac{1}{1-x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

$A$, $B$, $C$, etc. étant des coefficiens inconnus et indépendans de $x$, lesquels doivent être déterminés par la condition que ce développement hypothétique soit le quotient de la fraction $\frac{1}{1-x}$ : à cet effet, il faudra se procurer autant d'équations qu'il y a d'indéterminées $A$, $B$, $C$, etc. à évaluer. Or le quotient multiplié par le diviseur doit reproduire le dividende, quelque valeur numérique qu'on assigne à $x$; condition qui exige que l'identité

$$0 = \begin{matrix} A \\ -1 \end{matrix} + \begin{matrix} B \\ -A \end{matrix} \Big\} x + \begin{matrix} C \\ -B \end{matrix} \Big\} x^2 + \begin{matrix} D \\ -C \end{matrix} \Big\} x^3 + \text{etc.}$$

soit satisfaite indépendamment de toute valeur de $x$ ; elle doit donc avoir lieu pour $x = 0$. On a dans cette hypothèse,

$$A - 1 = 0 \ldots\ldots (1)$$

et il reste

$$0 = \begin{matrix} B \\ -A \end{matrix} \Big\} x + \begin{matrix} C \\ -B \end{matrix} \Big\} x^2 + \begin{matrix} D \\ -C \end{matrix} \Big\} x^3 + \text{etc.}$$

divisant par $x$, et faisant ensuite $x = 0$, il vient

$$B - A = 0 \ldots\ldots (2)$$

et il reste

$$0 = \begin{matrix} C \\ -B \end{matrix}\Big\} x + \begin{matrix} D \\ -C \end{matrix}\Big\} x^2 + \text{etc.}$$

d'où on déduit, après avoir divisé par $x$,

$$C - B = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

et ainsi de suite. Chacune des équations (1), (2), (3)' etc., contient un coefficient de plus, et d'ailleurs rien ne limite le nombre de ces équations : donc on pourra s'en procurer autant qu'il y a d'indéterminées à évaluer. On déduit de ces équations successives

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = 1, \text{ etc.}$$

et conséquemment

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \text{etc.}$$

Soit, en second lieu, la fraction $\frac{a}{a' + b'x}$ dont on demande le développement, on posera

$$\frac{a}{a' + b'x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

et multipliant de part et d'autre par $a' + b'x$, puis faisant tout passer dans un même membre, on aura

$$0 = \begin{matrix} Aa' \\ -a \\ +Ab' \end{matrix}\Big\} + \begin{matrix} Ba' \\ +Bb' \end{matrix}\Big\} x + \begin{matrix} Ca' \\ +Cb' \end{matrix}\Big\} x^2 + \begin{matrix} Da' \\ +Db' \end{matrix}\Big\} x^3 + \text{etc.}$$

Pour évaluer les indéterminées $A$, $B$, $C$, etc., il faudra, d'après le principe dont nous venons de faire usage, égaler séparément à zéro les coefficiens de chacune des puissances de $x$, ce qui donne les équations

$$\left.\begin{matrix} Aa' - a = 0 \\ Ba' + Ab' = 0 \\ Ca' + Bb' = 0 \\ Da' + Cb' = 0 \\ Ea' + Db' = 0 \\ \text{etc.} \end{matrix}\right\} \text{ d'où on déduit } \left\{\begin{matrix} A = \frac{a}{a'} \\ B = -\frac{b'}{a'} A \\ C = -\frac{b'}{a'} B \\ D = -\frac{b'}{a'} C \\ E = -\frac{b'}{a'} D \\ \text{etc.} \end{matrix}\right.$$

Chaque coefficient, à partir du second inclusivement, est donc égal au précédent multiplié par la fraction $-\frac{b'}{a'}$ qui est immédiatement donnée par le dénominateur $a' + b'x$ de la fraction proposée.

Soit encore

$$\frac{a+bx}{a'+b'x+c'x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

en opérant comme dans le cas précédent, il viendra

$$\left.\begin{array}{r} 0 = Aa' + Ba' \\ -a + Ab' \\ -b \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + Ca' \\ + Bb' \\ + Ac' \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x^2 + Da' \\ + Cb' \\ + Bc' \end{array}\right\} x^3 + \text{etc.}$$

Fgalant séparément à zéro les coefficiens de chacune des puissances de $x$, on a pour la détermination des coefficiens $A$, $B$, $C$, etc. les équations

$$\left.\begin{array}{l} Aa' - a = 0 \\ Ba' + Ab' - b = 0 \\ Ca' + Bb' + Ac' = 0 \\ Da' + Cb' + Bc' = 0 \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{d'où} \\ \text{on} \\ \text{déduit} \end{array} \left\{\begin{array}{l} A = \frac{a}{a'} \\ B = -\frac{b'}{a'}A + \frac{b}{a'} \\ C = -\frac{b'}{a'}B - \frac{c'}{a'}A \\ D = -\frac{b'}{a'}C - \frac{c'}{a'}B \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

On peut donc, au moyen de deux coefficiens consécutifs quelconques, trouver le suivant. Par exemple, si ces deux coefficiens consécutifs sont $P$ et $Q$ et le suivant $R$, on aura

$$a'R + b'Q + c'P = 0, \text{ d'où } R = -\frac{b'}{a'}Q - \frac{c'}{a'}P$$

Les deux premiers coefficiens une fois évalués suffiront donc pour donner tous les autres. Faisons une application à la fraction

$$\frac{1+2x}{1-x-x^2}$$

on aura

$$a = 1,\ b = 2,\ a' = 1,\ b' = -1,\ c' = -1$$

donc

$$A=1,\ B-A-2=0;\ C-B-A=0,$$
$$D-C-B=0.\ldots\ldots R-P-Q=0.$$

et conséquemment chaque coefficient, à partir du troisième inclusivement, est égal à la somme des deux qui le précèdent.

Il est aisé de conclure des cas particuliers ci-dessus, qu'une fraction rationnelle de la forme

$$\frac{a+bx+cx^2+\ldots\ldots px^{n-1}}{a'+b'x+c'x^2+d'x^3.\ldots\ldots+q'x^n}$$

donnera lieu à une suite dans laquelle le coefficient d'un terme quelconque dépendra d'autant de coefficiens des termes immédiatement précédens qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de $x$ au dénominateur, en observant cependant que cette loi ne commence à se manifester qu'après un nombre de termes, égal à celui du numérateur. Les quantités

$$-\frac{q'}{a'};\ \ldots\ldots\ldots-\frac{d'}{a'};\ -\frac{c'}{a'};\ -\frac{b'}{a'}$$

par lesquelles il faut multiplier les coefficiens des termes qui précèdent celui qu'on veut évaluer, à partir du pénultième par rapport à celui-ci, portent conjointement le nom *d'échelle de relation*. Les suites résultantes du développement des fractions rationnelles ont été appelées *suites récurrentes*, parce que, pour former chacun de leurs termes, il faut avoir recours à un certain nombre de termes précédens.

## *De la composition des équations algébriques.*

TOUTE équation algébrique est réductible à la forme

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots\ldots$$
$$+Tx+V=0\ldots(M)$$

Les racines de cette équation sont les quantités qui substituées en place de l'inconnue $x$, réduisent le premier membre à zéro.

Toute la théorie des équations repose sur la proposition suivante :

*Si on représente par* a *une des racines de l'équation* $(M)$, *le premier membre sera divisible exactement par* $x-a$.

Puisque $a$ est, par hypothèse, une des racines de l'équation $(M)$, on aura

$$a^m + Aa^{m-1} + Ba^{m-2} + Ca^{m-3} + \ldots + Ta + V = 0$$

d'où on déduit

$$V = -(a^m + Aa^{m-1} + Ba^{m-2} + \text{etc.} \ldots + Ta)$$

Substituant cette valeur de $V$ dans $(M)$, et effectuant les réductions, il viendra

$$(x^m - a^m) + A(x^{m-1} - a^{m-1}) + B(x^{m-2} - a^{m-2}) + \ldots$$
$$+ T(x - a) = 0 \ldots\ldots (N)$$

Or $m$ étant un nombre entier positif, on sait que

$$x^m - a^m = (x - a)\,[x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \text{etc.}$$
$$+ \ldots\ldots + a^{m-1}]$$

Chaque terme de l'équation $(N)$ sera donc divisible par $x - a$, conséquemment le premier membre de $(M)$ sera réductible à la forme

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots\ldots + Tx + V =$$
$$(x - a)[x^{m-1} + A'x^{m-2} + B'x^{m-3} + \ldots + T'] \ldots (P)$$

où les coefficiens $A', B' \ldots\ldots T'$, ont pour valeurs

$$A' = a + A$$
$$B' = a^2 + Aa + B$$
$$C' = a^3 + Aa^2 + Ba + C$$
$$\vdots$$
$$T' = a^{m-1} + Aa^{m-2} + Ba^{m-3} + \ldots + T$$

Si, outre la racine $a$, il existe une autre racine $b$ qui satisfasse à l'équation $(M)$, elle réduira à zéro le polynome $x^{m-1} + A'x^{m-2} + \ldots\ldots + T'$, facteur dans $(P)$ : en sorte qu'on aura

$$x^{m-1} + A'x^{m-2} + \ldots\ldots\ldots + T' = (x - b)$$
$$[x^{m-2} + A''x^{m-3} + B''x^{m-4} + \ldots\ldots\ldots + S'']$$

où les coefficiens $A'', B'' \ldots\ldots S''$, sont donnés par

$$A'' = b + A'$$
$$B'' = b^2 + A'b + B'$$
$$C'' = b^3 + A'b^2 + B'b + C'$$
$$\vdots$$
$$S'' = b^{m-2} + A'b^{m-3} + \ldots\ldots + R'$$

En sorte que le premier membre de $(M)$ devient

$$(x-a)(x-b)[x^{m-2} + A''x^{m-3} + B''x^{m-4} + \ldots\ldots + S''] \ldots\ldots (Q)$$

En continuant le même raisonnement, on prouvera que si $c$, $d$, $e$, etc., sont d'autres racines de l'équation $(M)$, son premier membre sera divisible exactement par le produit

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e) \text{ etc.}$$

1°. Il résulte de la seule inspection de $(P)$ que le premier membre de $(M)$ ne sera pas divisible par $x-a$, si $a$ n'est pas une racine de l'équation : d'où il suit *qu'un polynome n'est exactement divisible que par les facteurs simples correspondans à ses racines. La décomposition d'un polynome en facteurs du premier degré se réduit donc à la résolution d'une équation.*

2°. *Une équation ne peut admettre plus de racines que l'exposant de son degré ne renferme d'unités.* En effet, si une équation du degré $m$ pouvoit être satisfaite par un nombre de racines plus grand que $m$, un polynome du degré $m$ seroit divisible par le produit d'un nombre de facteurs simples, plus grand que $m$; ce qui est impossible.

Lorsqu'on suppose, comme on a coutume de le faire, que le polynome

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots + V = 0$$

est formé par le produit d'autant de facteurs simples tels que

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \text{ etc.}$$

qu'il y a d'unités dans l'exposant de son degré, il reste à faire voir qu'on peut toujours déterminer les quantités $A$, $B$, $C$, $D$ etc. d'après la condition que l'identité

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + V = (x-a)(x-b)(x-c) \text{ etc.}$$

ait lieu ; on a en effet, d'après ce qui a été dit dans le titre précédent,

$$(1^{o}).....A=-(a+b+c+d+\text{etc.})$$
$$(2^{o}).....B=ab+ac+ad+\text{etc.}$$
$$+bc+bd+\text{etc.}+cd+\text{etc.}$$
$$(3^{o}).....C=-(abc+abd+\text{etc.}$$
$$+acd+\text{etc.}+bcd+\text{etc.})$$
$$\text{etc.}$$
$$(m^{o})....V=\pm abcde,\ \text{etc.}$$

$V$ ayant le signe + lorsque $m$ est un nombre pair, et le signe — si $m$ est un nombre impair.

Si on multiplie l'équation (1°) par $a^{m-1}$ ; (2°) par $a^{m-2}$ etc., la pénultieme par $a$, et qu'on fasse la somme de tous ces produits et de $(m^{o})$, on aura

$$-a^{m}=Aa^{m-1}+Ba^{m-2}+Ca^{m-3}+....V$$

d'où

$$a^{m}+Aa^{m-1}+Ba^{m-2}+Ca^{m-3}+....V=0$$

On parviendroit de la même manière aux suivantes,

$$b^{m}+Ab^{m-1}+Bb^{m-2}+Cb^{m-3}+....V=0$$
$$c^{m}+Ac^{m-1}+Bc^{m-2}+Cc^{m-3}+....V=0$$

mais ces équations ne sont autres que la proposée dans laquelle on auroit substitué successivement $a$, $b$, $c$, etc., au lieu de $x$: donc $a, b, c$, etc. sont racines de l'équation $(M)$.

Cette analyse conduit donc au même résultat que la précédente.

En considérant une équation comme le produit d'un nombre de facteurs tels que

$$(x-a)\ (x-b)\ (x-c)\ (x-d)\ \text{etc.}$$

égal à l'exposant de son degré, effectuant les multiplications de ces facteurs et comparant les coefficiens des mêmes puissances de $x$, on arrive à ces conclusions :

1°. *Le coefficient du second terme, ou de* $x^{m-1}$, *pris en signe contraire, est égal à la somme de toutes les racines.*

2°. *Le coefficient du troisième terme, ou de* $x^{m-2}$, *est la somme des produits différens des racines multipliées deux à deux.*

3°. *Celui du quatrième terme, ou de* $x^{m-3}$, *pris en signe con-*

*traire, est la somme des produits différens des racines multipliées trois à trois.*

*Enfin le dernier terme est le produit de toutes les racines, pris en signe contraire, lorsque l'équation est de degré impair.*

De là suit 1°. *que dans une équation qui manque de second terme, la somme des racines positives est égale à celle des racines négatives.*

2°. *Que si le dernier terme manque dans une équation, l'une des racines est nécessairement nulle.*

## *Transformation des équations; évanouissement des termes intermédiaires.*

UNE équation algébrique étant donnée, il est toujours possible de la transformer, sans la résoudre, en une autre dont les racines aient avec celles de la première une relation donnée.

Soit l'équation

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots + Tx + V = 0 \ldots\ldots (M).$$

On propose de la transformer en une autre dont les racines soient toutes plus grandes que celles de la proposée, d'une quantité donnée $h$. Si on représente par $y$ la nouvelle inconnue, on aura par la condition de la question

$$y = x + h\,; \text{ d'où } x = y - h \ldots\ldots\ldots (1).$$

Substituant dans $(M)$ $y - h$ pour $x$, on aura la transformée

$$(y-h)^m + A(y-h)^{m-1} + B(y-h)^{m-2} + \text{etc.} + T(y-h) + V$$

$$= y^m - mh + A \Big\} y^{m-1} + m.\frac{m-1}{2} h^2 - (m-1)Ah + B \Big\} y^{m-2}$$

$$- m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3} h^3 + \frac{m-1 \cdot m-2}{2} Ah^2 - (m-2)Bh + C \Big\} y^{m-3} + \text{etc.}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots (N)$$

dont les racines surpassent de la quantité $h$ celles de la proposée.

La quantité $h$ étant arbitraire, on peut la déterminer par la condition que le coefficient d'un des termes de $(N)$ se réduise à zéro; on aura donc pour faire disparoître c second terme

$$A - mh = 0 \text{ : d'où } h = \frac{A}{m} \text{ et } x = y - \frac{A}{m}$$

En effet, chaque racine $x$ étant augmentée de $\frac{A}{m}$, la somme des $m$ racines sera augmentée de $\frac{mA}{m}$ ou de $A$; et comme cette somme $= -A$, celle des racines de $(N)$ sera $A - A = 0$.

On déduit de là cette regle, pour faire évanouir le second terme d'une équation : *il faut, au lieu de l'inconnue, substituer une nouvelle inconnue augmentée du coefficient du second terme, pris en signe contraire, et divisé par l'indice du degré de l'équation.*

Pour opérer l'évanouissement du troisième terme, on poseroit

$$\frac{m.\ m-1}{2} h^2 - (m-1)\,Ah + B = 0$$

et pour avoir $h$, il faudroit résoudre une équation du second degré. La valeur de $h$, propre à faire disparoître le quatrième terme, seroit du troisième degré, et ainsi de suite; en sorte que l'évanouissement du dernier terme dépendroit de la résolution d'une équation en $h$ de même degré que la proposée, laquelle ne seroit autre que $(M)$ dans laquelle on auroit substitué $-h$ pour $x$.

Si on vouloit transformer une équation dans laquelle manqueroit un terme, parce qu'on l'auroit déjà fait disparoître, ou parce que l'état de la question ne le comporteroit pas, en une autre qui ne renfermât plus un certain autre terme, on introduiroit dans l'équation le terme qui n'y entroit pas d'abord.

On pourroit penser que la substitution

$$x = y + (h + k)$$

feroit disparoître plus d'un terme; mais on observera qu'en remplaçant $h$ par $h+k$ dans $(N)$, puis égalant à zéro le coefficient de deux termes quelconques, on obtiendra deux

équations entre la même somme $(h+k)$, ce qui ne fera rien connoître par rapport à $h$ et à $k$. Il faut cependant excepter le cas où il existeroit entre les coefficiens de la proposée telle relation qui rendroit possible la coéxistence de ces deux équations. Ainsi, par exemple, la proposée

$$x^3 + x^2 + \tfrac{1}{3}x + C = 0$$

dans l'hypothese de

$$x = y - \tfrac{1}{3}$$

devient

$$y^3 + (C - \tfrac{1}{27}) = 0$$

transformée qui ne contient plus les termes $y^2$ et $y$.

On pourroit, par la substitution (1), transformer la proposée en une autre équation dans laquelle le coefficient d'un des termes seroit égal à une quantité donnée. En effet, on n'auroit qu'à égaler ce coefficient à la quantité donnée, et déterminer $h$ d'après cette condition.

Pour que les racines de la transformée deviennent égales à celles de la proposée, multipliées par une quantité donnée $f$, on posera

$$y = fx \text{ : d'où } x = \frac{y}{f}$$

et substituant pour $x$ cette valeur dans $(M)$, on aura la transformée

$$\frac{y^m}{f^m} + A\frac{y^{m-1}}{f^{m-1}} + B\frac{y^{m-2}}{f^{m-2}} + \ldots\ldots + V = 0$$

et multipliant par $f^m$,

$$y^m + Afy^{m-1} + Bf^2y^{m-2} + \ldots + Vf^m = 0$$

*Ainsi, pour transformer une équation en une autre dont les racines soient égales à celles de la proposée, multipliées par une quantité donnée $f$, il suffit de multiplier les termes de la proposée, à partir du second inclusivement, par les puissances successives $f$, $f^2$, $f^3 \ldots f^m$.*

On fait usage de cette transformation pour réduire à l'unité le coefficient de la plus haute puissance de l'inconnue, sans introduire de coefficiens fractionnaires. Soit en effet l'équation

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots\ldots + V = 0 \ldots\ldots\ldots (M)$$

En posant

$$x = \frac{y}{f}$$

on aura, d'après la règle énoncée précédemment,

$$Ay^m + Bfy^{m-1} + Cf^2y^{m-2} + \ldots\ldots + Vf^m = 0 \ldots\ldots (N)$$

Supposant donc l'indéterminée $f = A$, le premier membre de $(N)$ sera divisible par $A$; en sorte qu'effectuant la division par $A$, le coefficient de $y^m$ deviendra l'unité.

On peut encore, au moyen de cette règle, délivrer une équation des coefficiens fractionnaires qu'elle peut contenir. Soit, pour exemple, l'équation

$$x^3 - \frac{p}{m}x^2 + \frac{q}{n}x - \frac{r}{e} = 0$$

d'où

$$mnex^3 - pnex^2 + qmex - mnr = 0$$

et réduisant le coefficient du premier terme à l'unité, on a la transformée

$$y^3 - pney^2 + qm^2e^2ny - m^3n^3e^3r = 0$$

dont tous les coefficiens sont entiers.

Lorsqu'au moyen de la transformation précédente on a obtenu une équation

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots + Tx + V = 0 \ldots\ldots (M)$$

dont tous les coefficiens sont entiers, cette transformée ne peut avoir pour racine une fraction. En effet, admettons qu'une des racines puisse être un nombre fractionnaire $\frac{a}{b}$ réduit à sa plus simple expression, en substituant $\frac{a}{b}$ pour $x$ dans $(M)$, on auroit

$$\frac{a^m}{b^m} + A\frac{a^{m-1}}{b^{m-1}} + B\frac{a^{m-2}}{b^{m-2}} \ldots\ldots\ldots + \frac{a}{b} + V = 0;$$

et multipliant tous les termes par $b^{m-1}$, il viendroit

$$\frac{a^m}{b} = -[Aa^{m-1} + Bba^{m-2} + Cb^2a^{m-3} + \ldots\ldots\ldots + Tab^{m-2} + Vb^{m-1}] \ldots\ldots\ldots (N).$$

Or $\frac{a}{b}$ étant, par hypothèse, un nombre fractionnaire, $a$ et conséquemment $a^m$ n'auront pas de commun diviseur avec $b$, donc (page 230) $\frac{a^m}{b}$ sera une fraction; cependant le second membre de $(N)$ est un nombre entier, d'après la définition de

$a$, $b$, $A$, $B$, $C$, etc.; donc $x = \frac{a}{b}$ ne peut satisfaire à la proposée ($M$).

La substitution

$$x = -y$$

dans ($M$), changera les racines positives en négatives, et réciproquement; elle changera aussi les signes des termes qui renferment les puissances impaires de l'inconnue. *Donc, pour changer les racines positives d'une équation en négatives, et les négatives en positives, il suffira de changer les signes des puissances impaires.*

On peut encore transformer la proposée en une autre dont les racines soient des quantités réciproques à $x$, telles que

$$x = \frac{r}{y}$$

L'ordre des coefficiens se trouveroit renversé par cette transformation, en sorte que si le second terme manquoit dans la proposée, l'avant-dernier terme manqueroit dans la transformée, etc. On observera encore qu'à la plus grande racine $y$ de la transformée, correspond la plus petite $x$ de la proposée, et réciproquement.

Si on proposoit de transformer l'équation ($M$) en une autre, dont les racines fussent les racines quarrées des racines de la proposée, on auroit pour exprimer cette condition

$$y = \sqrt{x} \text{ d'où } y^2 = x$$

et substituant, il viendroit

$$y^{2m} + Ay^{2m-2} + By^{2m-4} + \ldots\ldots Ty^2 + V = 0$$

équation qui manque de second terme, ce qui doit arriver parce que le radical $\sqrt{x}$ étant affecté du double signe + et —, la somme des racines $y$ devient nulle.

*Généralement donc, pour transformer une équation en une autre dont les racines aient avec celles de la proposée une relation donnée, il faut traduire cette relation en algèbre, et substituer la valeur qu'elle donne pour $x$ dans l'équation proposée.*

## *De l'élimination.*

JUSQU'A présent, nous n'avons supposé qu'une équa-

tion et une inconnue ; mais il arrive fréquemment que les conditions comprises dans une question conduisent à plusieurs équations avec même nombre d'inconnues mêlées ensemble. Pour pouvoir déterminer celles-ci, il faut préliminairement ramener toutes ces équations à contenir séparément les inconnues ; on forme ainsi autant d'équations à une seule inconnue, à chacune desquelles on peut appliquer les méthodes de résolution que nous exposerons dans la suite. Cette séparation des inconnues est l'objet des méthodes d'élimination que nous allons faire connoître, en ne considérant, pour plus de simplicité, que deux équations et deux inconnues.

Lorque les équations sont du premier degré, l'élimination est toujours facile, et l'équation finale est aussi de ce degré ; mais il n'en est plus ainsi lorsque ces deux équations sont d'un degré supérieur au premier : il faut entendre par le degré d'une équation qui contient plusieurs inconnues, la plus forte somme des exposans des inconnues dans un même terme.

Soient entre les inconnues $x$ et $y$ deux équations complètes, l'une du degré $m$, l'autre du degré $n$ ; ces deux équations seront toujours réductibles à la forme

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + \ldots\ldots\ldots + Tx + V = 0 \ldots\ldots\ldots (A)$$

$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + R'x^{n-3} + \ldots\ldots\ldots + T'x + V' = 0 \ldots\ldots\ldots (B)$$

$P$ étant de la forme $a + by$

$Q$ ..... $c + dy + ey^2$

$P$ ..... $f + gy + hy^3 + ly^3$

etc.

$P'$ étant de la forme $a' + b'y$

$Q'$ ..... $c' + d'y + e'y^2$

$R'$ ..... $f' + g'y + h'y^3 + l'y^3$

etc.

les coefficiens $V$ et $V'$ pouvant renfermer jusqu'aux puissances $m$ et $n$ de $y$. Les équations $(A)$ et $(B)$ seroient complétement résolues, si l'on connoissoit tous les couples de valeurs de $x$ et de $y$ propres à satisfaire en même tems à l'une et à l'autre ; or l'élimination a pour objet de faire dépendre la recherche de ces valeurs de la résolution d'une

équation à une seule inconnue. Une valeur de $y$ seroit bien choisie, si, substituée dans $(A)$ et $(B)$, les équations résultantes avoient une racine commune, puisqu'alors ces deux valeurs correspondantes de $x$ et $y$, substituées simultanément dans les deux équations proposées, réduiroient chacune d'elles à $0=0$. L'équation finale en $y$ doit donc avoir pour racines toutes les valeurs de $y$ qui jouissent de la propriété énoncée : d'où résulte un moyen bien simple d'obtenir cette équation. En effet, les deux équations résultantes d'une substitution convenable pour $y$ devant acquérir un diviseur commun, si l'on cherche par les méthodes connues le commun diviseur entre les équations $(A)$ et $(B)$ ordonnées par rapport à $x$, on parviendra nécessairement à un reste indépendant de $x$, ou qui ne contiendra plus que $y$, lequel, égalé à zéro, donnera l'équation finale cherchée. Soit

$$R=0$$

cette équation en $y$ : sa résolution fera connoître les valeurs de $y$, et on obtiendra les valeurs correspondantes de $x$, en substituant successivement chacune de celles-là dans le reste du premier degré en $x$ qui, à cause de $R=0$, devient le commun diviseur entre $(A)$ et $(B)$ : d'ailleurs ce reste doit être égal à zéro, en sorte qu'on a cette seconde équation

$$Ax-B=0$$

$A$ et $B$ étant des fonctions de $y$, de laquelle on déduit une valeur de $x$ pour chacune des valeurs $y$.

Soient, pour exemples, les deux équations

$$(1)\ldots\ldots x^3+3x^2y+3xy^2-98=0$$
$$(2)\ldots\ldots x^2+4xy-2y^2-10=0$$

En divisant (1) par (2), et continuant la division jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste sans $x$, conformément à la méthode, on trouvera pour équation finale

$$43y^6+345y^4-1960y^3+750y^2-2940y-4302=0$$

Le diviseur commun du premier degré, ou l'équation qui donnera les valeurs de $x$, est

$$(9y^2+10)x-2y^3-10y-98=0$$

Soit encore le système des deux équations

$$(1^\circ.)\ x^3+mx^2+nx+p=0$$
$$(2^\circ.)\ x^2-bx-a-y=0$$

ou $m$, $n$, $p$, $a$ et $b$ sont des nombres : en appliquant la règle, on trouvera pour le reste du premier degré en $x$

$$(b^2+mb+n+a+y)x+(b+m)(a+y)+p=0\ldots(A)$$

et pour l'équation finale en $y$

$$\begin{aligned}&(y+a)^3-(mb+m^2-2n)(y+a)^2\\&+(nb^2+(mn-3p)b+n^2-2mp)(y+a)\\&-p(b^3+mb^2+nb+p=0\ldots\ldots\ldots\ldots(B)\end{aligned}$$

Autrement, on tire de la seconde équation

$$x^2=bx+a+y$$

d'où

$$x^3=bx^2+ax+yx=(b^2+a+y)x+b(a+y)$$

en écrivant pour $x^2$ sa valeur : donc substituant ces valeurs (1°.) on aura l'équation ($A$), d'où on déduit

$$x=-\frac{(+m)(a+y)+p}{b^2+mb+n+a+y}$$

valeur qui, substituée dans l'équation

$$x^2=bx+a+y$$

donnera l'équation ($B$). On peut voir sur la dernière méthode le chapitre XXIV de *l'Algèbre de Bossut*, édition de l'an 9.

Il conviendra de s'exercer à trouver les équations finales correspondantes aux systèmes d'équations

$$\begin{aligned}&(1°)\ldots\ldots\ldots x^2+px+q=0\\&(2°)\ldots\ldots\ldots x^2+p'x+q'=0\\&(1°)\ldots\ldots\ldots xy^3+by+x^3+a=0\\&(2°)\ldots\ldots\ldots y^3+cy+bx^3+h=0\end{aligned}$$

Il peut arriver qu'à une même valeur $y=6$ de l'équation finale doivent correspondre plusieurs valeurs de $x$ : dans ce cas, la substitution de cette valeur de $y$ dans les deux équations proposées donnera deux résultantes en $x$, qui auront entre elles un facteur commun d'un degré supérieur au premier ; par conséquent, le commun diviseur des deux premiers membres sera au moins du second degré, puisqu'à la valeur $y=6$ correspondent des valeurs multiples de $x$, le reste du premier degré $Ax-B$ sera

nul de lui-même, ou indépendamment de $x$ : on aura donc séparément

$$A = 0,\ B = 0;\ \text{d'où } x = \tfrac{0}{0}$$

Réciproquement, toutes les fois que, pour une même valeur de $y$ tirée de l'équation finale $R = 0$, l'équation

$$Ax - B = 0$$

donnera $x = \frac{0}{0}$, on conclura qu'à cette valeur de $y$ correspondent des valeurs multiples de $x$ : il faudra donc reporter cette valeur de $y$ dans le reste précédent du second degré, qui est la forme

$$A'x^2 + B'x + C'$$

Le résultat de la substitution, égalé à zéro, fournira une équation d'où l'on déduira les deux valeurs de $x$. Si cette équation donnoit encore $x = \frac{0}{0}$, on seroit averti, comme dans le cas précédent, qu'à cette valeur de $y$ correspondent plus de deux valeurs de $x$ ; et on effectueroit alors la substitution dans le reste du troisième degré, lequel, étant égalé à zéro, donneroit les trois valeurs de $x$ correspondantes à une même valeur de $y$.

Si les deux équations proposées avoient un facteur commun qui ne contint que l'une des deux inconnues, en égalant ce facteur à zéro, les deux équations seroient satisfaites, quelque valeur qu'on attribuât à l'autre inconnue : elles seroient donc susceptibles d'une infinité de solutions ; d'où l'on concluroit, si ce facteur étoit donné par l'état de la question, que le problème est indéterminé : il y auroit encore lieu à la même conclusion, si ce facteur commun étoit fonction de $x$ et de $y$.

La méthode précédente conduit à des calculs d'autant plus longs, que le degré des équations données est plus élevé. En partant des mêmes principes, *Euler* réduit la recherche de l'équation finale à l'élimination d'inconnues entre des équations du premier degré. L'équation finale en $y$ doit satisfaire à la condition que ses racines substituées successivement au lieu de l'inconnue $y$ dans les deux équations, y introduisent un facteur commun $x - \alpha$ : ainsi il s'agit de trouver la relation qui doit exister entre les coefficiens $P$, $Q$, etc. $P'$, $Q'$, etc., pour qu'on ait

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \text{etc.}$$
$$= (x - \alpha)\,[x^{m-1} + Ax^{m-2} + Bx^{m-3} + \text{etc.}] \ldots\ldots (M)$$

$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + \text{etc.}$$
$$= (x - \alpha)\,[x^{n-1} + \alpha' x^{n-2} + B'x^{n-3} + \text{etc.}] \ldots\ldots (N),$$

où $P$, $Q$, etc. $P'$, $Q'$, etc. sont des fonctions de $y$. Pour évaluer les indéterminées

$$A,\ B,\ C,\ \text{etc.},\ A',\ B',\ C',\ \text{etc.}$$

on multipliera

$$(M) \text{ par } x^{n-1} + A'x^{n-2} + \text{etc.}$$
$$\text{et } (N) \text{ par } x^{m-1} + Ax^{m-2} + \text{etc.}$$

ce qui donnera

$$(x^m + Px^{m-1} + \text{etc.})\ (x^{n-1} + A'x^{n-2} + \text{etc.})$$
$$= (x^n + P'x^{n-1} + \text{etc.})\ (x^{m-1} + Ax^{m-2} + \text{etc.})$$

Effectuant les produits et comparant les coefficiens des mêmes puissances de $x$, on aura $m+n-1$, équations entre les indéterminées $A$, $B$, $C$, etc., $A'$, $B'$, $C'$, etc. Or le nombre de ces indéterminées est $m+n-2$, il suffira donc de $m+n-2$ équations pour les évaluer; conséquemment il restera une équation entre les coefficiens $P$, $Q$, $R$, etc., $P'$, $Q'$, $R'$, etc., qui devra être satisfaite pour que les équations proposées $(M)$ et $(N)$ acquièrent un commun diviseur $x-\alpha$: cette équation de condition sera l'équation finale cherchée. Les inconnues $A$, $B$, $C$, etc., $A'$, $B'$, $C'$, etc., n'étant pas multipliées entre elles, les équations résultantes des comparaisons seront du premier degré. L'équation finale étant résolue, on substituera successivement chacune de ses racines $y$ dans les valeurs de $A$, $B$, $C$, etc., etc., $A'$, $B'$, $C'$, etc. On aura donc ainsi les quotiens des premiers membres de $(M)$ et $(N)$ par le diviseur commun $x-\alpha$ qu'on obtiendra en effectuant la division.

Nous appliquerons cette méthode aux deux équations

$$x^2 + px + q = 0$$
$$x^2 + p'x + q' = 0$$

que nous supposerons décomposées comme il suit:

$$x^2 + px + q = (x-\alpha)\ (x+A)$$
$$x^2 + p'x + q' = (x-\alpha)\ (x+B)$$

d'où résulte, conformément à la méthode, l'équation

$$(x^2+px+q)\ (x+B) = (x^2+p'x+q')\ (x+A),$$

de laquelle on déduit, après avoir effectué les multiplica-

tions et comparé les coefficiens des mêmes puissances de $x$,

$$(1^o)\ldots\ldots\ldots B + p = A + p'$$
$$(2^o)\ldots\ldots\ldots Bp + q = Ap' + q'$$
$$(3^o)\ldots\ldots\ldots Bq = Aq'$$

on tire des deux premières

$$B = \frac{p'(p-p')+q'-q}{p-p'}$$
$$A = \frac{p(p-p')+q'-q}{p-p'}$$

La troisième est l'équation finale.

Nous ferons une application de cette méthode à la recherche de l'équation finale résultante de l'élimination de $x$, entre les deux équations suivantes,

$$x^3 + 3yx^2 + 3y^2x - 98 = 0$$
$$x^2 + 4yx - 2y^2 - 10 = 0$$

traitées précédemment : en représentant, par $(x-\alpha)$ le facteur commun du premier degré, nous supposerons

$$x^3 + 3yx^2 + 3y^2x - 98 = (x-\alpha)(x^2+px+q)$$
$$x^3 + 4yx - 2y^2 - 10 = (x-\alpha)(x+p')$$

d'où résulte

$$\frac{x^3+3yx^2+3y^2x-98}{x^2+4yx-2y^2-10} = \frac{x^2+px+q}{x+p'}$$

réduisant au même dénominateur, et effaçant de part et d'autre le diviseur commun on obtient,

$$\left.\begin{matrix} x^4 + 3y \\ + p' \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x^3 + 3y^2 \\ + 3yp' \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x^2 - 98 \\ + 3y^2p' \end{matrix}\right\} x - 98p'$$
$$= \left.\begin{matrix} x^4 + 4y \\ + p \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x^3 - 2y^2 \\ - 10 \\ + 4yp \\ + q \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x^2 - 2y^2p \\ - 10p \\ + 4yq \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x - 2y^2q \\ - 10q \end{matrix}\right\}$$

cette équation étant identique, on aura les suivantes :

$$p' + 3y = p + 4y \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$3yp' + 3y^2 = q + 4yp - 2y^2 - 10 \ (2)$$
$$3y^2p' - 98 = 4yq - 10p - 2y^2p \ldots. (3)$$
$$98p' = 2y^2q + 10q \ldots\ldots\ldots (4)$$

Les trois premières équations suffisent pour déterminer les coefficients $p'$, $q$, $p$, et elles donnent :

$$p' = p + y$$
$$q = 8y^2 - py + 10$$
$$p = \frac{29y^3 + 40y + 98}{9y^2 + 10}$$

l'équation (4) devient donc

$$98y + 98\left(\frac{29y^3 + 40y + 98}{9y^2 + 10}\right)$$
$$= 16y^4 - \left(\frac{29y^3 + 40y + 98}{9y^2 + 10}\right)(2y^3 + 10y) + 100y^2 + 100$$

d'où l'on tire

$$98y + (98 + 2y^3 + 10y)\left(\frac{29y^3 + 40y + 98}{9y^2 + 10}\right)$$
$$= 16y^2 + 100y^2 + 100$$

effectuant les opérations et les réductions, on trouve enfin

$$43y^6 + 345y^4 - 1960y^3 + 750y^2 - 2940y - 4302 = 0$$

résultat identique avec celui qu'on a obtenu par la premiere méthode.

On peut au moyen de l'analyse précédente, résoudre ce problème : *deux équations algébriques entre $x$ et $y$ étant données, trouver les relations qui doivent exister entre les coefficiens fonctions de $y$, pour que ces équations admettent un commun diviseur du deuxième degre.*

Supposons que les deux équations données soient du troisieme degré

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$
$$x^3 + p'x^2 + q'x + r' = 0,$$

$p$, $q$, $r$, $p'$, $q'$, $r'$ étant des fonctions de $y$. Si la valeur convenable de $y$ étoit connue, les deux équations résultantes de sa substitution ayant deux racines communes, auroient un commun diviseur du second degré de la forme..... $(x - \alpha)(x - \beta)$ : réciproquement, si les deux équations proposées étoient divisibles par un facteur commun de cette forme, elles auroient deux racines communes : il faut donc déterminer $p$, $q$, $r$, $p'$, $q'$, $r'$ par la condition que les deux membres de chacune des équations

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - \alpha)(x - \beta)(x + A)$$
$$x^3 + p'x^2 + q'x + r' = (x - \alpha)(x - \beta)(x + B)$$

soient identiques. Divisant ces deux équations l'une par l'autre, l'équation résultante

$$(x^3+px^2+qx+r)(x+B)$$
$$=(x^3+p'x^2+q'x+r)(x+A)$$

aura lieu, quel que soit $x$. Développant les produits indiqués, et comparant les coefficiens des mêmes puissances de $x$, on aura les quatre équations

$$B+p=A+p'$$
$$Bp+q=Ap'+q'$$
$$Bq+r=Aq'+r'$$
$$Br=Ar'.$$

Il n'entre dans ces équations que deux inconnues $A$ et $B$: il restera donc deux équations entre $p, q, r, p', q'$ et $r'$, qui exprimeront les conditions cherchées. On trouve pour $A$ et $B$

$$A=\frac{r(p-p')}{r-r'}$$
$$B=\frac{r'(p-p')}{r-r'}$$

puis ces deux relations

$$(p-p')(pr'-p'r)+(r-r')(q-q')=0$$
$$(p-p')(qr'-q'r)+(r-r')^2=0$$

Ainsi la valeur de $y$ propre à introduire deux racines communes dans les équations proposées, doit satisfaire aux deux équations précédentes; conséquemment le commun diviseur entre celles-ci fera connoître cette valeur de $y$.

Si les deux équations proposées sont d'un ordre quelconque, tel que

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}+\ldots+Tx+V=0$$
$$x^n+P'x^{n-1}+Qx'^{n-2}+R'x^{n-3}+\ldots+T'x+V'=0,$$

et qu'on veuille déterminer les relations qui doivent exister entre les coefficiens, fonctions de $y$, pour qu'elles obtiennent deux racines communes, on sera conduit à l'identité

$$(x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots\ldots$$
$$+Tx+V)(x^{n-1}+A'x^{n-3}+\text{etc.})$$
$$=(x^n+P'x^{n-1}+Q'x^{n-2}+\ldots\ldots$$
$$+T'x+V')(x^{m-1}+Ax^{m-3}+\text{etc.}).$$

Mais en développant et comparant les coefficiens des puissances semblables de $x$, on obtiendra $m+n-2$, équations dans lesquelles les indéterminées $A$, $B$ etc. $A'$, $B'$ etc. seront au premier degré. Or le nombre des coefficiens $A$, $B$, $C$ etc. étant $m-2$, et celui des coefficiens $A'$, $B'$, $C'$ etc. étant $n-2$, il suffira, pour les déterminer, de $m+n-4$ égalités : donc il restera deux équations entre les coefficiens $P$, $Q$, $R$ etc. $P'$, $Q'$, $R'$ etc., qui exprimeront les relations nécessaires entre ces coefficiens pour que les proposées aient deux racines communes.

Il est facile, au moyen de ce qui précède, de découvrir les conditions qui doivent exister pour que deux équations d'un degré quelconque acquièrent trois ou un plus grand nombre de racines.

L'analyse que nous venons d'exposer sert, dans la théorie des courbes, à distinguer les cas dans lesquels deux ou plusieurs points d'intersection correspondent à une même abscisse.

## *Recherche des racines entières des équations numériques.*

Une équation algébrique étant donnée, on peut toujours, par de simples transformations, la réduire à la forme

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots Tx + V = 0.$$

dont les coefficiens sont des nombres entiers, et on a vu précédemment qu'une équation ainsi préparée ne peut avoir pour racine une fraction $\frac{a}{b}$; ainsi les racines seront entières, ou incommensurables, réelles ou imaginaires.

Soit $a$ une des racines de l'équation $(M)$, on aura, par la substitution,

$$a^m + Aa^{m-1} + Ba^{m-2} + \ldots\ldots + Ta + V = 0$$

donc

$$\frac{V}{a} = -(a^{m-1} + Aa^{m-2} + Ba^{m-3} + \ldots\ldots + T).$$

Le second membre étant entier, $V$ est conséquemment divisible par $a$. Ainsi les racines entières d'une équation divisent exactement le dernier terme : d'où il suit qu'en cherchant successivement tous les diviseurs du dernier

terme, et essayant chacun d'eux sous les signes + et —, comme racines, on trouvera toutes les racines entières de la proposée, si elle en admet de telles; ou si aucun des diviseurs du dernier terme n'a la propriété de satisfaire à la proposée, on sera assuré que celle-ci n'admet pas de racines entières.

Soit, pour exemple, l'équation

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0:$$

les diviseurs du dernier terme, pris sous les signes + —, sont 1, 2, 4, 8, — 1, — 2, — 4, — 8. Faisant les substitutions de ces nombres pour $x$, on trouve que + 1, + 2, + 4 réduisent le premier nombre à zéro; d'où on conclut que ces nombres sont les racines de l'équation proposée.

Mais lorsque le dernier terme à un grand nombre de diviseurs, le procédé ci-dessus devient très-long. La méthode dont l'exposition va suivre a pour objet d'assigner un caractère auquel on puisse reconnoître, *à priori*, ceux des diviseurs qui doivent être rejetés.

Soit $-a$ le diviseur qu'on veut éprouver : s'il satisfait à la proposée, le premier membre doit être exactement divisible par $x + a$; et réciproquement, si $x + a$ divise exactement l'équation proposée, $-a$ est une des racines de cette équation : or pour que la division par $x + a$ soit possible, il faut que le premier membre soit de la forme

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots\ldots$$
$$+ Tx + V = (x+a)\ (x^{m-1} + A'x^{m-2} + B'x^{m-3} + \ldots + T'),$$

équation qui doit être identique : il faudra donc, après avoir effectué le produit indiqué, égaler les coefficiens des mêmes puissances de $x$; ce qui donne les équations

$$\begin{array}{ll}
(1^\circ) \ldots\ldots & aT' = V \\
(2^\circ) \ldots\ldots & T' + aS' = T \\
(3^\circ) \ldots\ldots & S' + aR' = S \\
\ldots\ldots & \vdots \\
(m^\circ) \ldots\ldots & A' + a = A
\end{array}$$

dont le nombre est $= m$. Or celui des indéterminées $A'$, $B'$, $C'$, etc., étant $m - 1$, il suffira d'un pareil nom-

bre des premières équations précédentes pour les évaluer.

La dernière

$$A' + a = A$$

devra donc être identique. On tire

de (1°) . . . . . $T' = \frac{r}{a}$

de (2°) . . . . . $S' = \frac{T - T'}{a}$

de (3°) . . . . . $R' = \frac{S - S'}{a}$

$$\vdots$$

$$A' = \frac{B - B'}{a}$$

de la dernière . . . $1 = \frac{A - A'}{a}$

Les nombres $A', B' \ldots\ldots R', S', T'$, etc. doivent donc être entiers pour que $x + a$ soit un diviseur de l'équation, et de plus la dernière équation doit être identique; d'où suit cette règle.

*Pour connaître si $x + a$ est un diviseur de l'équation, $a$ étant un des diviseurs du dernier terme, on divisera le dernier terme par $a$, ce qui, par hypothèse, donnera toujours un quotient entier; puis on retranchera le quotient de l'avant-dernier terme, et on divisera cette différence par $a$; puis on retranchera le quotient de l'antépénultième terme, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit arrivé au coefficient du second terme de l'équation, dont la différence avec le quotient précédent, divisée par $a$, doit donner l'unité.* Lorsque le nombre $a$ satisfera à toutes ces conditions, il sera racine de l'équation : dans le cas contraire, il doit être rejeté.

L'unité étant diviseur de tout nombre, il faudra essayer l'unité tant en plus qu'en moins, ce qui sera très-expéditif.

Appliquons cette méthode à l'équation

$$x^3 - 2x^2 - 13x + 6 = 0$$

Les diviseurs du dernier terme, autres que $+1$ et moins $-1$, sont

$$2, 3, 6, -2, -3, -6$$

et on trouve, en appliquant la règle, que le diviseur 3

est le seul qui satisfasse à toutes les épreuves : d'où on conclut que $x+3$ est facteur de l'équation, et que $-3$ est une racine.

La méthode précédente exige que l'on sache trouver tous les diviseurs d'un nombre. Soient donc $N$ un nombre quelconque, $\alpha, \beta, \gamma$, etc., ses facteurs nombres premiers ; le nombre $N$ pourra toujours être représenté par $\alpha^m . \beta^n . \gamma^p .$ etc. En effet, la méthode à suivre pour décomposer le nombre $N$ en facteurs premiers, consiste à essayer la division du nombre $N$ successivement par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, etc. Lorsque la division réussit par le nombre premier $\alpha$, on la repète autant de fois qu'il est possible, $m$ fois, par exemple, et désignant le dernier quotient par $P$, on a

$$N = \alpha^m P$$

Le nombre $N$ n'étant plus divisible par $\alpha$, on n'essaiera pas de diviser $P$ par un nombre moindre que $\alpha$ ; car si $P$ étoit divisible par $\theta < \alpha$ le nombre $N$ seroit aussi divisible par $\theta$ ; ce qui est contre l'hypothèse. On trouvera successivement

$$P = \beta^n Q, \quad Q = \gamma^p R, \text{ etc.} ;$$

ce qui donne

$$N = \alpha^m \beta^n \gamma^p \text{ etc.}$$

Si, après avoir essayé la division du nombre $N$ par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, etc. jusqu'à $\sqrt{N}$, on n'en trouve aucun qui divise $N$, on sera certain que $N$ est un nombre premier. Car supposons que $N$ soit divisible par un nombre premier $\theta > \sqrt{N}$, on auroit donc, en appelant $P$ le quotient,

$$N = \theta P ; \text{ or } \frac{N}{\theta} < \frac{N}{\sqrt{N}} < \sqrt{N} : \text{ donc } P < \sqrt{N}$$

donc $N$ seroit divisible par un nombre $P$ moindre que $\sqrt{N}$, et, *à fortiori*, par un nombre premier moindre que $\sqrt{N}$, ce qui est contre l'hypothèse.

Le nombre $N$ étant réduit à la forme $\alpha^m . \beta^n . \gamma^p . \delta^q$, etc., aura pour diviseurs tous les nombres résultans de toutes les combinaisons que l'on pourra former en prenant successivement pour $m, n, p, q,$ etc. les nombres compris entre $o$ et $m$, $o$ et $n$, etc. On obtiendra toutes ces combinaisons en développant le produit

$$(\alpha^0+\alpha^1+\alpha^2+\ldots.+\alpha^m)\ (\zeta^0+\zeta^1+\zeta^2+\ldots.$$
$$+\zeta^n)\ (\gamma^0+\gamma^1+\gamma^2+\ldots.\gamma^p)\ \text{etc.}$$

donc le nombre de ces diviseurs sera

$$(m+1)\ (n+1)\ (p+1)\ (q+1)\ \text{etc.}$$

Le nombre 360 étant $=2^3\times 3^2\times 5$, on formera tous les termes du produit

$$(1+2+4+8)\ (1+3+9)\ (1+5).$$

dont le nombre, qui sera celui des diviseurs, est

$$(3+1)\ (2+1)\ (1+1)=24.$$

## *Recherche des racines égales*

Si $a$ est une des racines de l'équation

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+Tx+V=0\ldots.(M)$$

le premier membre sera exactement divisible par $x-a$. En effectuant la division, on obtiendra pour quotient un polynôme du degré $m-1$; et dans le cas où ce polynôme se réduiroit encore à zéro dans l'hypothèse de $x=a$, l'équation proposée auroit deux racines égales entre elles et $=a$. Si, après avoir effectué une seconde division par $x-a$, le polynôme résultant du degré $m-2$ se réduisoit de même à zéro par la substitution $x=a$, la proposée auroit trois racines égales entre elles et $=a$. On se propose ici d'assigner un caractère auquel on puisse reconnoitre la présence de ces racines, puis d'exposer la méthode à suivre pour les déterminer.

Dans l'équation $(M)$, $x$ représente l'une quelconque des racines: soit $x'$ une autre racine aussi quelconque de la même équation, et on aura

$$x'^m+Ax'^{m-1}+Bx'^{m-2}+\ldots.Tx'+V=0\ldots.(N)$$

Si $u$ designe la différence entre les racines $x'$ et $x$, ensorte qu'on ait

$$x'=x+u$$

la substitution de $x'$ dans $(N)$ donnera une équation qui, ordonnée par rapport aux puissances successives de la différence $u$, considérée comme inconnue, sera encore du degré $m$, et aura pour racines toutes les différences possibles entre

les racines de la proposée : si on l'écrit en commençant par les derniers termes, on trouvera un résultat de la forme

$$X + Yu + Zu^2 + Ru^3 + \ldots + u^m = o \ldots (P)$$

$X$, $Y$, $Z$, etc. étant des fonctions de $x$, telles que

$$X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Tx + V$$

$$Y = mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} + \ldots + T$$

$$Z = \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}Ax^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{2}Bx^{m-4} + \text{etc.}$$

etc.

Tous ces coefficiens $X$, $Y$, $Z$, etc. dérivent les uns des autres suivant une loi uniforme ; d'ailleurs il est visible que le premier coefficient $X$ se compose de la somme des premiers termes des développemens de $(x+u)^m$, $A(x+u)^{m-1}$, etc ; le second $Y$ est la somme des coefficiens des seconds termes des mêmes développemens, et ainsi de suite.

Les racines de la proposée étant $a$, $b$, $c$, etc., celles de la transformée en $u$ seront $a-x$, $b-x$, $c-x$, etc. c'est-à-dire, toutes les différences entre une racine $x$ et chacune des autres ; donc si pour $x$ dans $(P)$, on substituoit une quelconque des racines $a$, $b$, $c$, cette équation auroit pour racines les différences entre la racine substituée, chacune des autres et elle-même. Soit donc qu'on fasse dans $(P)$ $x = a$, $x = b$, etc., on aura toujours une racine $u = o$ ; ainsi la transformée sera réductible au degré $m-1$. En effet, son dernier terme $X$, qui n'est autre que le premier membre de la proposée devient nul lorsqu'on met pour $x$ l'une quelconque des racines, et alors l'équation $(P)$ devient divisible par $u$, et se réduit à

$$Y + Zu + Vu^2 + \ldots + u^{m-1} = o \ldots (Q)$$

Il résulte de ce qui précède, que si deux quelconques des racines deviennent égales entre elles, l'équation $(Q)$ donnera

$$u = o$$

ce qui exige qu'on ait

$$Y = o$$

Ainsi lorsque la proposée a deux racines égales, les deux équations

$$X = o,\ Y = o$$

ont

ont lieu en même temps, c'est-à-dire qu'elles ont une racine commune qui est une des racines égales.

Réciproquement, si les deux équations

$$X = o \text{ et } Y = o$$

ont une racine commune, la proposée aura deux racines égales. En effet, cette racine substituée dans l'équation $(P)$, fera évanouir le dernier et l'avant-dernier terme, donc cette équation devient divisible par $u^2$, conséquemment deux de ses racines sont nulles : l'une est $a - a$, ou $b - b$, etc; l'autre $a - b$ ou $a - c$, etc; donc ou $a = b$, ou $a = c$, etc.

D'où suit cette règle pour reconnoître si une équation a deux racines égales : *Formez l'équation* $(P)$ *et posez* $X = o$, $Y = o$ : *si ces deux polynômes ont un commun diviseur, il se trouve deux racines égales parmi celles de la proposée : dans le cas contraire, il n'existe pas de telles racines.*

Si la proposée a trois racines chacune égale à $a$, l'équation $(P)$ aura trois racines égales à zéro; ce qui exige qu'on ait en même temps

$$X = o, \; Y = o, \; Z = o$$

Donc cette racine réduira à zéro les deux polynômes $Y$ et $Z$, qui auront pour commun diviseur $x - a$.

Réciproquement, si les trois coefficiens

$$X = o, \; Y = o, \; Z = o$$

ont un commun diviseur, on démontrera, comme ci-dessus, que la proposée admet trois racines égales.

En général la condition nécessaire et suffisante pour que la proposée ait $n$ racines égales ou un facteur de la forme $(x - a)^n$, est que les $n$ premiers coefficiens de l'équation $(P)$ ordonnée par rapport aux puissances ascendantes de $u$, aient un commun diviseur.

Il résulte encore de ce qui précède, que si la proposée, outre les $n$ racines $= a$, contient $n'$ racines $= b$, les $n'$ premiers coefficiens de l'équation $(P)$ auront pour commun diviseur $x - b$; si de plus elle renferme $n''$ racines $= c$, les $n''$ premiers coefficiens de $(P)$, auront un commun diviseur $x - c$, et ainsi de suite. L'analyse suivante conduit, dans le cas général, à deux équations, dont l'une résulte du produit des facteurs multiples élevés chacun à la première puissance, et l'autre est le produit de tous les facteurs inégaux.

Soit

$$x^m + Ax^{m-1} + \text{etc.}$$
$$= (x-a)^n (x-b)^{n'} (x-c)^{n''} (x-d) (x-e) \text{ etc.}$$

l'équation en $u$ sera

$$X+Yu+Zu^2+Vu^3+\ldots\ldots\ldots\ldots+u^m$$
$$=(x-a+u)^n(x-b+u)^{n'}(x-c+u)^{n''}(x-d+u)(x-e+u)\text{ etc.}$$

et développant, on trouve, après avoir ordonné suivant les puissances ascendantes de $u$,

$$X+Yu+Zu^2+Vu^3+\text{etc.}$$
$$=(x-a)^n(x-b)^{n'}(x-c)^{n''}(x-d)(x-e)\text{ etc.}$$
$$+n(x-a)^{n-1}(x-b)^{n'}(x-c)^{n''}(x-d)(x-e)\text{ etc.}\Big\}$$
$$+n'(x-a)^n(x-b)^{n'-1}(x-c)^{n''}(x-d)(x-e)\text{ etc.}\Big\}$$
$$+n''(x-a)^n(x-b)^{n'}(x-c)^{n''-1}(x-d)(x-e)\text{ etc.}\Big\}u$$
$$+(x-a)^n(x-b)^{n'}(x-c)^{n''}(x-e)\ldots\ldots\text{etc.}\Big\}$$
$$+(x-a)^n(x-b)^{n'}(x-c)^{n''}(x-d)\ldots\ldots\text{etc.}\Big\}$$
$$+\text{etc.}$$

On voit, d'après ce résultat, c'est-à-dire, en comparant $X$ et $Y$ avec les coefficiens des mêmes puissances de $u$ dans le second membre, que le commun diviseur entre $X$ et $Y$ se composera du produit de tous les facteurs multiples de la proposée, élevés chacun à une puissance moindre d'une unité. Soit $D$ ce commun diviseur, on aura

$$D=(x-a)^{n-1}(x-b)^{n'-1}(x-c)^{n''-1}.$$

Mais

$$X=(x-a)^n(x-b)^{n'}(x-c)^{n''}(x-d)(x-e)\text{ etc.}$$

donc si l'on divise $X$ par $D$, et qu'on désigne le quotient par $Q$, on trouvera

$$Q=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)\text{ etc.}$$

qui résulte du produit des facteurs égaux élevés chacun à la première puissance, multipliés par les facteurs inégaux : ainsi l'équation

$$Q=0$$

n'aura plus de racines égales. On peut encore obtenir un résultat plus commode, en cherchant le commun diviseur entre $D$ et $Q$ : car soit $D'$ ce commun diviseur, on trouvera

$$D'=(x-a)(x-b)(x-c).$$

Ainsi l'équation

$$D'=0$$

résultera du produit des seuls facteurs multiples de la proposée, élevés chacun à la première puissance. Divisant ensuite $Q$ par $D'$, on aura, en désignant le quotient par $Q'$,

$$Q' = (x - d)\ (x - e)\ \text{etc.}$$

en sorte que des deux équations

$$D' = 0,\quad Q' = 0$$

qui n'auront que des racines inégales, la première donnera les racines égales, et la seconde les racines inégales de la proposée.

Pour connoître le degré de multiplicité de ces racines, il faudroit diviser la proposée autant de fois que possible par chacun des facteurs de

$$D' = 0.$$

## *Méthode pour trouver la partie entière des racines incommensurables d'une équation, et théorèmes préliminaires.*

On peut toujours, au moyen des méthodes précédemment exposées, supposer une équation tellement réduite qu'elle ne renferme plus que des racines incommensurables ou des racines imaginaires. Il s'agit donc maintenant d'exposer la suite des opérations à effectuer pour trouver, 1°. la partie entière des racines incommensurables; 2°. la partie décimale, avec toute l'exactitude que requiert l'état de la question.

Soit, à cet effet, l'équation

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots Tx - V = 0\ldots\ldots(M).$$

*si on trouve deux nombres qui substitués successivement pour $x$, donnent des résultats de signes contraires, on pourra conclure que l'équation aura, au moins, une racine réelle comprise entre ces deux nombres.*

En effet, désignons par $P$ la somme de tous les termes de l'équation, qui ont le signe $+$, et par $Q$ la somme de tous ceux qui ont le signe $-$, en sorte que $(M)$ soit représentée par

$$P - Q = 0$$

et supposons que les deux nombres $p$ et $q$, qui donnent des résultats de signes contraires, soient positifs, que $p$ soit le

plus petit et $q$ le plus grand, et que la substitution de $p$ pour $x$ donne un résultat négatif, et celle de $q$ pour $x$ un résultat positif, ou, en d'autres termes, que pour $x=p$ la différence $P-Q$ devienne négative, et que pour $x=q$ elle devienne positive : il résulte de la forme des quantités $P$ et $Q$ qui ne contiennent que des termes positifs et des puissances entières et positives de $x$, que ces fonctions croissent à mesure que $x$ augmente, et qu'en faisant augmenter $x$ par des degrés insensibles depuis $p$ jusqu'à $q$, elles croîtront aussi par des degrés insensibles, mais de manière cependant que la fonction $P$ croîtra plus rapidement que la fonction $Q$, puisque de plus petite qu'elle étoit, elle devient plus grande que $Q$ : donc, entre les deux valeurs $p$ et $q$ de $x$ il y en aura nécessairement une à laquelle correspondra

$$P=Q \text{ ou } P-Q=0$$

Cette valeur de $x$ sera une racine de l'équation $(M)$ : donc, etc.

Si les nombres $p$ et $q$ étoient de signes différens, ou tous deux négatifs, les termes de l'équation, qui contiendroient $x$ à des puissances impaires, deviendroient négatifs; $P$ et $Q$ ne représenteroient plus, comme dans le cas précédent, une somme de termes essentiellement positifs ; on ne pourroit donc plus faire usage du même raisonnement : mais, au moyen d'une transformation bien simple, on peut ramener ce cas au précédent, comme il suit.

Soit $r$ un nombre tel que $r+p$ et $r+q$ soient des nombres positifs : si dans $(M)$ on suppose

$$x=y-r, \text{ d'où } x+r=y$$

on aura une équation en $y$ dont les racines seront plus grandes que celles de $(M)$ de la quantité $r$. Les nombres $r+p$ et $r+q$, substitués successivement pour $y$ donneront des résultats de signes contraires, puisque ces substitutions reviennent à celles de $p$ et $q$ pour $x$ dans $(M)$. Donc, d'après la proposition précédente, l'équation en $y$ aura, au moins, une racine réelle comprise entre $r+p$ et $r+q$, et conséquemment la proposée aura, au moins, une telle racine comprise entre $p$ et $q$.

*Toute équation de degré impair a, au moins, une racine réelle positive, lorsque son dernier terme est négatif, et négative, si son dernier terme est positif.*

En effet, supposant $x=0$, l'équation se réduit au der-

nier terme : ainsi cette substitution donne, dans le premier cas, un résultat négatif; reste à faire voir qu'on peut toujours substituer pour $x$ une valeur telle que le résultat soit positif. Soit, à cet effet, l'équation proposée

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \ldots + Tx - V = 0 \ldots (M)$$

et prenons

$$x = k + 1$$

$k$ étant une quantité qui doit être déterminée d'après la condition que le résultat soit positif : on aura

$$\begin{aligned}
x^m = (k+1)^m &= k(k+1)^{m-1} + (k+1)^{m-1} \\
(k+1)^{m-1} &= k(k+1)^{m-2} + (k+1)^{m-2} \\
(k+1)^{m-2} &= k(k+1)^{m-3} + (k+1)^{m-3} \\
(k+1)^{m-3} &= k(k+1)^{m-4} + (k+1)^{m-4} \\
&\text{etc.} \\
(k+1)^2 &= k(k+1) + (k+1)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
(k+1)^m = k(k+1)^{m-1} + k(k+1)^{m-2} + k(k+1)^{m-3} + \ldots \\
+ k(k+1) + (k+1) \ldots\ldots (N)
\end{aligned}$$

Le résultat de la substitution de $(k+1)$ pour $x$ dans les autres termes de $(M)$ sera

$$\begin{aligned}
-A(k+1)^{m-1} + B(k+1)^{m-2} - C(k+1)^{m-3} + \ldots \\
+ T(k+1) - V \ldots\ldots (P)
\end{aligned}$$

en sorte que le premier membre de $(M)$, ou la somme des résultats $(N)$ et $(P)$ est

$$\begin{aligned}
(k-A)(k+1)^{m-1} + (k+B)(k+1)^{m-2} + (k-C)(k+1)^{m-3} + \ldots \\
(k+T)(k+1) + (k+1) - V \ldots\ldots (Q)
\end{aligned}$$

$S$ étant le plus grand coefficient négatif de la proposée, il est clair que l'hypothèse

$$k = S$$

satisfera à la condition énoncée. Si tous les coefficiens étoient négatifs et égaux entre eux, ce qui est le cas plus défavorable, le résultat $(Q)$ seroit encore rendu positif par

$$k = S$$

puisqu'il deviendroit

$$S + 1 - S = + 1.$$

On conclut de là *que si, dans un polynome, on substitue pour x le plus grand coefficient négatif, pris positivement et augmenté de l'unité, le résultat sera nécessairement positif.*

Lorsqu'il se trouve dans l'équation proposée, à partir du premier terme, plusieurs termes positifs avant le premier terme négatif, on peut encore obtenir un résultat positif, en prenant pour $x$ un nombre moindre que $S + 1$, $S$ ayant l'acception ci-dessus.

Soit $m - n$ l'exposant de $x$ dans le premier des termes négatifs de l'équation

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{etc.} - Mx^{m-n} \ldots\ldots$$
$$+ Tx - V = 0 \ldots\ldots (M)$$

et soit $k$ un nombre à déterminer par la condition que le nombre $k + 1$ substitué pour $x$ donne un resultat positif : il est visible qu'on peut écrire

$$(1^o) \ldots\ldots (k+1)^m = k(k+1)^{m-1}(k+1)^{m-n} + (k+1)^{m-1}$$

$$(2^o) \ldots\ldots (k+1)^{m-1} = k(k+1)^{n-1}(k+1)^{m-(n+1)} + (k+1)^{m-2}$$

$$(3^o) \ldots\ldots (k+1)^{m-2} = k(k+1)^{n-1}(k+1)^{m-(n+2)} + (k+1)^{m-3}$$

etc.

et ainsi de suite en continuant la même décomposition jusqu'au terme

$$(k+1)^n = k(k+1)^{n-1} + (k+1)^{n-1}$$

Si on pose

$$k(k+1)^{n-1} = P$$

on aura, par la substitution de $k + 1$ pour $x^m$,

$$(k+1)^m = P(k+1)^{m-n} + P(k+1)^{m-(n+1)} + P(k+1)^{m-(n+2)} + \ldots$$
$$+ P + (k+1)^{n-1} \ldots\ldots (N)$$

Si, dans les termes compris entre le premier et celui qui contient l'inconnue avec l'exposant $m - n$, termes qui, par

hypothèse, sont positifs, on fait les substitutions (2°), (3°), etc., ce qui donnera un résultat $Q$, et qu'ensuite on écrive $k+1$ pour $x$ dans ceux qui suivent, on aura

$$Q-M(k+1)^{m-n}+N(k+1)^{m-(n+1)}+\ldots-V\ldots(P)$$

en sorte que

$$(M)=Q+(P-M)\,(k+1)^{m-n}$$
$$+(P+N)\,(k+1)^{m-(n+1)}+\ldots\ldots-V$$

Si maintenant on détermine $k$ par la condition que $P$ soit égal au plus grand coefficient négatif, le résultat de la substitution sera positif : il en seroit, à plus forte raison, de même si pour $P$ on prenoit un nombre plus grand : on pourra donc supposer

$$P \text{ ou } k\,(k+1)^{n-1}=\text{ou}>S$$

$S$ étant le plus grand coefficient négatif ; cette condition sera remplie en faisant

$$k^n=S,\ \text{d'où}\ k=\sqrt[n]{S}$$

Ainsi, dans le cas où le premier et le second termes seroient positifs, il suffiroit, pour obtenir un résultat positif, de prendre la racine carrée du plus grand coefficient négatif, augmentée de l'unité. Si le troisième terme étoit aussi positif, on se borneroit à la racine cubique du même coefficient, à laquelle on ajouteroit l'unité. Dans le cas où le second terme est négatif, on a $n=1$ et

$$\sqrt[n]{S}+1=S+1$$

ce qu'on a déjà trouvé.

Ces théorêmes servent principalement, comme nous le verront bientôt, à donner les limites entre lesquelles sont comprises les racines positives d'une équation.

Puisque les nombres 0 et $S+1$ ou 0 et $\sqrt[n]{S}+1$, substitués successivement au lieu de $x$ dans $(M)$, donnent des résultats de signes contraires, il en faut conclure que la proposée a, au moins, une racine plus grande que zéro, et plus petite que $S+1$, et que, par conséquent, elle a, au moins, une racine réelle et positive.

Si le dernier terme de la proposée est positif, ce qui

est le second cas distingué, en changeant les signes des puissances impaires de $x$, on aura une transformée dont le premier terme sera négatif, et dont les racines seront les mêmes, aux signes près, que celle de la proposée; et, changeant ensuite tous les signes pour rendre le premier terme positif, le dernier deviendra négatif. Donc la transformée aura au moins une racine réelle positive, et conséquemment la proposée en aura, au moins, une réelle et négative.

*Toute équation de degré pair dont le dernier terme est négatif, a au moins, deux racines réelles, l'une positive, et l'autre négative.*

En effet, pour $x = 0$, l'équation se réduit au dernier terme qui, par hypothèse, est négatif; supposant ensuite

$$x = S + 1$$

$S$ ayant la même acception que ci-dessus, on obtient un résultat positif : donc l'équation a, au moins, une racine comprise entre 0 et $S+1$, c'est-à-dire, au moins une racine réelle et positive. Si l'on change dans la même équation les signes des puissances impaires, le premier terme et le dernier conserveront toujours le même signe : donc, d'après ce qui vient d'être démontré, la transformée aura, au moins, une racine réelle et positive, et par conséquent la proposée en aura, au moins, une réelle et négative.

On a prouvé précédemment que le premier membre d'une équation étoit toujours divisible par le facteur simple correspondant à chacune de ses racines; donc si l'équation proposée est du degré $m$, et a $n$ racines réelles $a$, $b$, $c$, etc., en divisant l'équation par le produit $(x-a)(x-b)(x-c)$ etc., on aura pour quotient un polynôme du degré $m-n$, lequel ne deviendra jamais négatif, quelque valeur qu'on donne à $x$ : car s'il existoit une valeur de $x$ qui le rendît négatif, comme on pourroit assigner pour $x$ une autre valeur qui le rendit positif, on auroit deux valeurs de $x$, qui, substituées successivement au lieu de l'inconnue, donneroient des résultats de signes contraires, et conséquemment il existeroit une valeur intermédiaire $h$, pour laquelle le polynôme quotient seroit $= 0$; l'équation auroit donc, en outre, la racine réelle $h$, ce qui est contre l'hypothèse; donc ce polynôme sera toujours de degré pair avec un dernier terme positif : d'où résulte cette conclusion :

*Le dernier terme d'une équation sera nécessairement positif ou négatif, suivant que le nombre de ses racines réelles positives sera pair ou impair.*

Si les deux nombres $p$ et $q$, qui substitués successivement au lieu de l'inconnue, donnent des résultats de signes contraires, ne diffèrent que de l'unité, le plus petit de ces deux nombres, s'il est entier, ou le nombre entier, immédiatement au-dessous, s'il n'est pas entier, sera la valeur la plus approchée, en moins, d'une des racines de l'équation. Si la différence entre les nombres $p$ et $q$ est plus grande que l'unité, en substituant successivement depuis $p$ jusqu'à $q$, les nombres

$$p, p+1, p+2, p+3 \ldots\ldots q$$

il y aura nécessairement deux substitutions consécutives qui donneront des résultats de signes alternatifs : donc, puisque les nombres qui auront fourni ces résultats ne diffèrent entre eux que de l'unité, le plus petit des deux sera, comme nous l'avons déjà observé, la valeur entière la plus approchée, par défaut, d'une des racines de l'équation.

La difficulté se réduit donc à trouver deux nombres qui substitués pour $x$, donnent des résultats de signes contraires : mais pour réduire au plus petit nombre possible les substitutions inutiles, il convient de calculer des limites entre lesquelles les racines soient toutes comprises. Or une de ces limites est, d'après ce qui a été démontré, la somme du plus grand coefficient négatif, pris positivement, et de l'unité, et à *fortiori*, tout nombre positif plus grand : ainsi la plus grande racine positive sera toujours moindre que $S+1$, $S$ ayant l'acception convenue précédemment. Si l'on fait

$$x = \frac{1}{y}$$

les racines de la transformée en $y$ seront les puissances négatives des racines de la proposée ; prenant donc pour $y$ une quantité plus grande que la plus grande racine positive de la transformée, $\frac{1}{y}$ sera une quantité moindre que la plus petite racine $x$ : donc si on suppose

$$y = S' + 1$$

$S'$ étant le plus grand coefficient négatif de la transformée, pris positivement, $\frac{1}{S'+1}$ sera moindre que la plus petite racine de l'équation proposée. Donc toutes les racines réelles et positives de la proposée, seront comprises entre les limites

$$S+1 \text{ et } \frac{1}{S'+1}$$

portant les nombres à substituer doivent être compris entre les mêmes limites.

Les limites $S+1$ et $\frac{1}{S'+1}$ ne sont pas toujours aussi rapprochées qu'il est possible ; on les trouvera telles au moyen de l'analyse suivante qui est due à *Newton*. Pour faire connoître sa méthode, reprenons l'équation

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \ldots + V = 0$$

Si on suppose

$$x = z + l$$

les racines de la transformée en $z$ seront moindres de la quantité $l$ que celles de l'équation en $x$ ; donc, si l'on détermine $l$ par la condition que tous les termes de la transformée soient de mêmes signes, cette transformée ne pourra avoir que des racines négatives, et par conséquent le nombre $l$ dont chaque racine de la proposée a été diminuée, surpassera nécessairement la plus grande de ces racines.

La transformée en $z$ sera

$$X + Yz + Zz^2 + Uz^3 + \text{etc.} = 0$$

dans laquelle

$$X = l^m - Al^{m-1} + Bl^{m-2} - Cl^{m-3} + \text{etc.}$$

$$Y = ml^{m-1} - (m-1)Al^{m-2} + (m-2)Bl^{m-3} - \text{etc.}$$

$$Z = m\frac{m-1}{2}l^{m-2} - (m-1)\frac{m-2}{2}Al^{m-3} + \text{etc.}$$

$$U = m.\frac{m-1}{2}\frac{m-2}{2}l^{m-3} - \text{etc.}$$

Ainsi on cherchera une valeur de $l$, qui, substituée dans les quantités $X$, $Y$, $Z$, etc., les rende toutes positives, en commençant par la dernière de ces quantités, laquelle n'aura que deux termes, et remontant successivement aux autres : de cette manière on déterminera facilement le plus petit nombre entier qui pourra être pris pour $l$, nombre qui sera la limite la plus proche cherchée. Cette méthode n'a pas, comme les précédentes, l'avantage de donner le résultat sans aucun tâtonnement, mais du moins elle le donne toujours le plus exact possible.

Le but des substitutions successives est d'obtenir autant de couples de résultats de signes contraires que l'équation proposée a de racines réelles et positives : examinons quel doit être l'intervalle à mettre entre les nombres à substituer pour satisfaire à cette condition.

Soient $a$, $b$, $c$, $d$, etc. les racines réelles d'une équation proposée : son premier membre sera de la forme

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots\times Y=0$$

$Y$ étant un polynôme qui, d'après ce qu'on a démontré, ne peut jamais devenir négatif, quelque valeur qu'on substitue pour $x$. Si on prend pour $x$ un nombre $p$ plus grand ou plus petit que l'une et l'autre des deux racines $a$ et $b$, puis pour $x$ un nombre $q$ plus petit ou plus grand que chacune des mêmes racines, et tel que le produit des autres facteurs $(x-c)$ $(x-d)$ etc. soit de même signe que dans l'hypothèse $x=p$, les résultats des deux substitutions seront de même signe, quoique les nombres substitués comprennent deux des racines. On prouveroit de la même manière que deux nombres qui donnent des résultats de même signe peuvent intercepter un nombre pair ou, en général, $2k$ racines réelles. Ainsi la réciproque du théorème énoncé plus haut n'a pas lieu. Si on prend pour $x$ un nombre $p$ plus petit ou plus grand que chacune des trois racines $a$, $b$, $c$, puis pour $x$ un nombre $q$ plus grand ou plus petit que chacune des mêmes racines, et tel que le produit des facteurs $(x-d)$ $(x-c)$ etc. soit de même signe que pour $x=p$, on aura des résultats de signes différens : donc deux nombres qui donnent des résultats de signes contraires peuvent intercepter trois ou, en général, $(2k+1)$ racines réelles.

Il suit de-là que si l'équation a plusieurs racines réelles qui diffèrent entre elles d'une quantité moindre que l'unité, en prenant l'unité pour la différence des nombres à substituer, le nombre des résultats de signes différens pourroit être moindre que celui des racines réelles.

Pour obvier à cet inconvénient, nous démontrerons que *si l'on substitue successivement au lieu de $x$ deux nombres dont l'un soit plus grand et l'autre plus petit qu'une des racines, et qui diffèrent en même temps l'un de l'autre d'une quantité moindre que la plus petite différence entre les racines réelles de l'équation, ces deux substitutions donneront nécessairement deux résultats de signes différens.*

En effet, soit $a$ la racine en question, $b$, $c$, $d$, etc. étant les autres racines réelles, l'équation sera

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\text{ etc.}\ldots\times Y=0\ldots(M),$$

$Y$ étant le produit des facteurs correspondans aux autres racines. Supposons

$$p>a,\ q<a \text{ et } p-q<\delta$$

$\delta$ étant la plus petite différence entre les racines, le résultat de la substitution de $p$ pour $x$ dans la proposée sera

$$(p-a)\ (p-b)\ (p-c)\ (p-d)\ \text{etc.....} \times P....(R)$$

et celui de la substitution de $q$ pour $x$ sera

$$(q-a)\ (q-b)\ (q-c)\ (q-d)\ \text{etc.....} \times Q....(S),$$

$P$ et $Q$ étant ce que devient la fonction $Y$ lorsqu'on remplace $x$ par $p$. D'après les hypothèses faites sur $p$ et $q$, les deux facteurs $p-a$ et $q-a$ seront de signes différens, d'ailleurs les résultats $P$ et $Q$ ne peuvent pas devenir négatifs; donc les résultats $(R)$ et $(S)$ seront de signes différens, si chacun des facteurs $p-b$, $p-c$, etc. est de même signe que celui qui lui correspond dans $(S)$. Or si $p-b$, $q-b$ pouvoient être de signes différens, la racine $b$ seroit comprise entre $p$ et $q$; donc les nombres $p$ et $q$ comprendroient les deux racines $a$ et $b$; donc on auroit

$$a - b < p - q$$

ce qui est contre l'hypothèse, puisqu'on a supposé $p-q <$ que la plus petite différence entre les racines $a$, $b$, $c$, etc.

Il suit du théorème précédent, qu'en substituant entre les limites $\frac{1}{S'+1}$ et $S+1$ une suite de nombres qui diffèrent entre eux d'une quantité moindre que la plus petite différence entre chacune des racines réelles, les résultats correspondans formeront une série dans laquelle il y aura autant de changemens de signes que de racines réelles positives dans l'équation proposée, d'où l'on déduira la valeur entière approchée de chacune d'elles.

Les théorèmes sur lesquels repose la résolution des équations numériques, peuvent se déduire de considérations géométriques qui ont l'avantage de faire voir à l'œil même les principales propriétés des équations.

Reprenons l'équation générale.

Pl. A Fig. 1.

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \ldots + Tx + V = o$$

et représentons par des lignes droites les valeurs successives que nous attribuerons à l'inconnue $x$, ainsi que les valeurs correspondantes que recevra le premier membre de l'équation: mais alors, au lieu de supposer le second membre égal à zéro, nous le représenterons par $y$, parce que, parmi les valeurs prises pour $x$, il s'en trouvera d'autres que celles qui réduisent le premier membre à zéro, et pour lesquelles

$y$ prendra différentes valeurs. Cela posé, nous porterons les valeurs successives de $x$, rapportées à une ligne prise pour unité, sur une droite indéfinie $AB$, à partir d'un point fixe $O$, en convenant d'étendre les valeurs positives de $x$ sur la partie $OB$, dans le sens de gauche à droite, par conséquent les valeurs négatives de $x$ sur la partie opposée $OA$, ou dans le sens de droite, à gauche. Soit donc $OP$ une valeur quelconque de $x$; pour représenter la valeur correspondante de $y$, nous ménerons par le point $P$ une perpendiculaire à la droite $OP$, et si la valeur correspondante de $y$ est positive, nous la porterons sur cette perpendiculaire en $PQ$, ou au-dessus de la droite $OB$; dans le cas contraire, on étendra $y$ sur le prolongement de $PQ$, en dessous de $AB$, région des valeurs négatives de $y$. Répétant la même opération pour les valeurs de $x$, tant positives que négatives, valeurs qu'on fera croître par des degrés très-rapprochés, et joignant les extrémités de toutes ces perpendiculaires, on aura une courbe qui sera le tableau de l'équation

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{etc.} = y$$

Cette courbe ainsi décrite, il est clair que les intersections $G$, $I$, $M$, $N$, $R$, etc., avec l'axe $AB$, donneront les racines de l'équation proposée, car comme cette équation n'est satisfaite que par les valeurs de $x$, qui donnent $y = o$, les racines sont donc les abscisses qui répondent aux points dont les ordonnées sont nulles, c'est-à-dire, dans lesquels la courbe coupe l'axe $AB$; ainsi les racines de l'équation proposée seront

$$OM,\ ON,\ OR,\ \text{etc.} - OI - OG,\ \text{etc.},$$

ces dernières ayant le signe —, parce que les intersections $I$, $G$, etc. tombent à gauche du point $O$. Cette construction donne lieu à des remarques générales sur les équations. 1°. Comme l'équation de la courbe ne contient que des puissances entières et positives de l'inconnue $x$, il est clair qu'à chaque valeur de $x$ répondra une valeur déterminée de $y$, et que cette valeur sera unique et finie tant que l'abscisse $x$ sera finie : mais comme rien ne limite les valeurs de $x$, elles pourront être supposées infiniment grandes, tant positives que négatives, et il leur répondra aussi des valeurs de $y$ infiniment grandes : d'où il suit que la courbe aura un cours continu et simple, et qu'elle pourra s'étendre à l'infini à droite et à gauche de l'origine $O$.

Il suit de-là que la courbe ne pourra passer d'un côté de l'axe

à l'autre sans le couper, et qu'elle ne pourra revenir du même côté qu'après l'avoir coupé deux fois : par conséquent, entre deux points de la courbe, placés du même côté de l'axe, il y aura nécessairement un nombre pair d'intersections ; au contraire, entre deux points placés l'un au-dessus et l'autre au-dessous de l'axe, la courbe aura un nombre impair d'intersections.

Donc si on a trouvé deux valeurs de $y$, de signes différens, on sera assuré qu'entre les valeurs correspondantes de $x$ il tombera nécessairement un nombre impair de racines de la proposée, une, ou trois, ou cinq, ou en général $(2k+1)$ racines, etc. ; de sorte que, dans ce dernier cas, on conclura sur-le-champ qu'il y a, au moins, une racine de la proposée entre ces deux valeurs de $x$ : au contraire, si l'on a deux valeurs de $y$ de même signe, il ne pourra tomber entre les deux valeurs correspondantes de $x$ qu'un nombre pair de racines, c'est-à-dire qu'il n'y en aura aucune, ou qu'il y en aura deux ou quatre, etc. ou en général $2k$ : mais si la différence entre deux valeurs de $x$ est moindre que la plus petite distance entre deux intersections, c'est-à-dire, moindre que la plus petite différence entre les racines, il est facile de voir, par la nature de la courbe, que les deux valeurs de $x$ ne comprendront qu'une seule racine lorsque les valeurs de $y$ correspondantes seront de signes différens, et qu'elles n'en comprendront aucune, si elles sont de mêmes signes.

Pl. A. Fig. 2. Il nous reste à faire connoître un procédé aussi simple qu'élégant, au moyen duquel on construira l'ordonnée $y$ correspondantes aux différentes valeurs de l'abscisse $x$. Pour cela, nous représenterons l'équation proposée par

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.} = o$$

en écrivant les termes dans l'ordre inverse; l'équation à la courbe sera

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}$$

Ayant mené la ligne $O\,X$ prise pour axe des abscisses dont l'origine est supposée en $O$, on portera sur cette ligne la partie $O\,I$, égale à l'unité des quantités $a$, $b$, $c$, qu'on peut supposer exprimées par des nombres; puis ayant élevé aux points $O$ et $I$ les perpendiculaires $OD$, $IM$, on portera sur la ligne $OD$ les parties $OA = a$, $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$, et ainsi de suite; puis à partir de $O$ la ligne $OP = x$, et du point $P$ la perpendiculaire $P\,T$. Si, par exemple, $d$ est le dernier des coefficiens $a$, $b$, $c$, etc., en sorte que la proposée

ne soit que du troisième degré, et qu'il s'agisse d'avoir la valeur de

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

ayant mené d'abord la parallèle $DM$ à l'axe $OI$, on fera cette construction : on joindra les points $M$ et $C$ par une droite qui rencontrera $PT$ en $S$; par le point $S$, on menera à $CI$ la parallèle $LH$ qui déterminera le point $L$ qu'on joindra avec $B$ par une ligne $LB$, qui coupera $PT$ en $R$; par ce point $R$, on tirera une parallèle $GK$ à $OI$, et du point $K$ au point $A$ une droite $KA$ qui coupera $PT$ en $Q$; et le point $Q$ ainsi déterminé, sera tel que

$$PQ = a + bx + cx^2 + dx^3$$

En effet, les deux triangles semblables $CDM$, $CHS$ donneront, à cause de $DM = CI = 1$,

$$CH = dx$$

ajoutant $CB = c$, on aura

$$BH = c + dx$$

De même les deux triangles semblables $BHL$, $BGR$ donneront, à cause de $HL = 1$,

$$BG = cx + dx$$

ajoutant $AB = b$, on aura

$$AG = b + cx + dx^2$$

Enfin les triangles semblables $AGK$ et $AFQ$ donneront, à cause de $GK = 1$,

$$FA = bx + cx^2 + dx^3$$

ajoutant $OA = a$, on aura

$$OF = PQ = a + bx + cx^2 + dx^3 = y$$

La même construction et la même démonstration s'appliquent à un nombre quelconque de termes. Il faudra seulement avoir soin, si quelques-uns des coefficiens $a$, $b$, $c$, etc. étoient négatifs, de les prendre dans le sens opposé. Par exemple, si le coefficient $a$ étoit négatif, on porteroit la partie $OA$ au-dessous de l'axe $OI$; ensuite, à partir de $A$ et, dans le cas de $b$ positif, on prendroit toujours $AB = b$, mais si $b$ étoit négatif, il faudroit porter $AB$ dans un sens opposé, à partir

de l'extrémité de $-a$, et ainsi des autres coefficiens, suivant les signes qui les affecteroient. A l'égard de $x$, on prendra $OP$ de $O$ vers $I$ pour les valeurs positives de $x$, et de $O$ vers $I'$ pour les valeurs négatives de $x$.

La difficulté est donc réduite à trouver une quantité moindre que la plus petite différence entre les racines réelles de la proposée : pour y parvenir, on formera une équation qui ait pour racines toutes les différences possibles entre celles de l'équation donnée, puis on cherchera, d'après la méthode indiquée (pages 277 et 278), un nombre moindre que la plus petite de ces racines. Nous nous proposerons donc la solution de ce problême :

*Etant donnée une équation quelconque, former une équation dont les racines soient toutes les différences possibles entre celles de la proposée.*

Soit l'équation

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \ldots\ldots + V = 0 \ldots\ldots (M).$$

Si, au lieu de $x$, on écrit $x+z$, $z$ exprimera toutes les différences possibles entre les racines de $(M)$, et on aura, en ordonnant par rapport aux puissances successives de $z$, une équation en $z$ de même degré, laquelle, en commençant par les derniers termes, sera de la forme

$$X + Yz + Zz^2 + Uz^3 + \ldots\ldots + z^m = 0 \ldots\ldots (N).$$

Les coefficiens $X$, $Y$, $Z$, etc., étant donnés par les équations

$$X = x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \text{etc.}$$

$$Y = mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} \text{ etc.}$$

$$Z = \frac{m.\,m-1}{2}x^{m-2} - \frac{m-1.\,m-2}{2}Ax^{m-3} + \text{etc.}$$

etc.

Les racines de l'équation $(M)$, etc., étant $a, b, c$, etc., etc. celles de $(N)$ seront

$$z = a - x;\ z = b - x;\ z = c - x;\ \text{etc.}$$

et faisant (1°) $x = a$, on aura

$$z = a - a;\ z = b - a;\ z = c - a;\ \text{etc.}$$

(2°) $x = b$, on aura

$$z = a - b;\ z = b - b;\ z = c - b;\ \text{etc.}$$

et ainsi de suite. Pour chacune de ses substitutions, l'équation en $z$ devient du degré $m-1$ ce qui doit arriver, puisqu'à

puisqu'à chaque fois $X=0$ : mais l'équation cherchée doit avoir pour racines toutes ces différences $b-a$, $c-a$, etc., $a-b$, $c-b$, etc. ; c'est-à-dire, qu'elle doit être le résultat de l'élimination de $x$ entre les équations $(M)$ et $(N)$. En effet, on sait par la théorie de l'élimination, que cette équation finale aura pour racines toutes les valeurs de $z$ qui substituées dans $(N)$, donneront une équation en $x$, ayant au moins une racine commune avec $(M)$ : or si on suppose $x=a$ dans $(M)$ et $(N)$, puis $z$ égal à une quelconque des différences $b-a$, $c-a$, etc., nécessairement les deux équations $(M)$ et $(N)$ seront satisfaites : donc ces différences entre la racine $a$ et chacune des autres seront autant de racines de l'équation finale. On prouveroit de la même manière qu'elle aura aussi pour racines toutes les différences entre la racine $b$ et chacune des autres, et ainsi de suite. Cette équation finale sera toujours du degré $m.\ m-1$, car le nombre de ses racines

$$\begin{aligned} &b-a,\ c-a,\ d-a,\ \text{etc.}\\ &a-b,\ c-b,\ d-b,\ \text{etc.}\\ &a-c,\ b-c,\ d-c,\ \text{etc.} \end{aligned}$$

est le même que celui des arrangemens qu'on peut faire avec $m$ lettres prises deux à deux : ainsi cette équation sera de degré pair ; de plus ces différences seront égales deux à deux et de signes contraires, d'où résulte que l'équation finale ne doit renfermer que des puissances paires de l'inconnue $z$ ; car en y changeant $+z$ en $-z$, les racines positives deviendront négatives et réciproquement, donc les racines de la transformée seront les mêmes en quantités et en signes, conséquemment le premier membre ne changera pas par cette substitution, d'où on conclut qu'il ne doit renfermer que des puissances paires de l'inconnue. L'équation aux différences des racines sera donc de la forme

$$z^{2n}-A'z^{2n-2}+B'z^{2n-4}-C'z^{2n-6}+\text{etc.}\ldots\ldots$$
$$+V'=0\ldots\ldots\ldots\ldots(O)$$

et par la substitution

$$y=z^2\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

elle se changera dans la suivante

$$y^n-A'y^{n-1}+B'y^{n-2}-C'y^{n-3}+\text{etc.}\ldots\ldots$$
$$+V'=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(P)$$

et comme les facteurs de $(O)$ sont

$z-(a-b)$, $z-(b-a)$, $z-(a-c)$, $z-(c-a)$, etc.

Ceux de $(P)$ seront

$$y-(a-b)^2\,;\ y-(a-c)^2 \text{ etc.}$$

$(P)$ sera donc l'équation aux quarrés des différences des racines de la proposée.

L'équation $(P)$ sera toujours la même soit qu'on augmente, soit qu'on diminue d'une même quantité chacune des racines de la proposée, en sorte que si cette dernière contient le terme de $x^{m-1}$, on pourra le faire disparoître, puis chercher l'équation aux carrés des différences de la transformée, qui sera encore la même que $(P)$; mais sa formation sera un peu plus facile.

Connoissant ainsi l'équation aux carrés des différences des racines, pour trouver une quantité moindre que la plus petite de ses racines, on posera

$$y=\frac{1}{u}\ldots\ldots\ldots(2)$$

et substituant dans $(P)$, cette équation donnera, toutes réductions faites,

$$1-A'u+B'u^2-C'u^3+\ldots\ldots+V'u^n=0$$

et divisant par $V'$,

$$u^n-A''u^{n-1}+B''u^{n-2}-C''u^{n-3}+\text{etc}\ldots\ldots=0\ldots\ldots(Q)$$

Soit $l$ un nombre plus grand que la plus grande racine positive de $(Q)$, $\frac{1}{l}$ sera, d'après la substitution (2), un nombre moindre que la plus petite racine positive $y$, et $\frac{1}{\sqrt{l}}$ sera, d'après la substitution (1), un nombre plus petit que la plus petite différence entre les racines réelles de l'équation proposée. Donc si le nombre

$$\sqrt{l}<1,\ \text{d'où}\ \frac{1}{\sqrt{l}}>1$$

on sera certain que la proposée n'a pas de racines réelles dont les différences soient moindres que l'unité; on pourra donc, dans ce cas, prendre l'unité pour la différence entre les substitutions successives à faire entre les limites trouvées. Mais si

$$\sqrt{l}>1,\ \text{d'où}\ \frac{1}{\sqrt{l}}<1$$

alors il sera possible qu'il y ait dans l'équation $(M)$ des racines dont les différences soient moindres que l'unité : mais comme la plus petite de ces différences sera toujours nécessairement plus grande que $\frac{1}{\sqrt{l}}$, on pourra prendre ce nombre ou un nombre moindre pour la distance entre les substitutions. En général, soit $k$ le nombre entier immédiatement plus grand que $\sqrt{l}$, si $\sqrt{l}$ n'est pas un nombre entier, on aura

$$\frac{1}{k} < \frac{1}{\sqrt{l}}$$

cette différence $\frac{1}{k}$ de la progression des nombres à substituer étant connue, on prendra successivement pour $x$ les nombres

$$0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \frac{3}{k} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{n}{k}$$

en commençant par le nombre immédiatement moindre que $\frac{1}{S'+1}$, et continuant jusqu'à la limite supérieure $S+1$. Les résultats dus à ces substitutions formeront une suite de nombres, dans laquelle il y aura nécessairement autant de variations de signes que de racines réelles positives dans la proposée, et de plus chacune de ces racines tombera entre les deux nombres qui auront donné des résultats de signes contraires : conséquemment le plus petit des deux différera, en moins, de la racine comprise d'une quantité moindre que $\frac{1}{k}$. On connoîtra donc ainsi le nombre des racines réelles positives de la proposée et la valeur approchée de chacune d'elles, à moins de $\frac{1}{k}^{ième}$ près.

Si tous les termes de l'équation aux quarrés des différences ont le même signe, aucun nombre positif n'y pourra satisfaire, donc aucun des carrés des différences entre les racines de la proposée ne sera positif, donc celle-ci ne pourra avoir plus d'une racine réelle : dans ce cas, on pourra supposer

$$\frac{1}{k} = 1$$

On adoptera cette différence entre les substitutions successives lorsqu'on saura, *à priori*, que la proposée ne doit pas avoir plus d'une racine réelle et positive.

Nous ferons l'application de ce qui précède à la recherche des racines de l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

Il faut d'abord remplacer $x$ par $x + z$, ce qui donne, toutes réductions faites,

$$3x^2 + 3zx + z^2 - 7 = 0$$

puis éliminer $x$ entre ces deux équations, pour avoir l'équation finale en $z$, qui sera l'équation aux différences des racines de la proposée. A cet effet, conformément à la méthode, on divisera la première équation par la seconde, celle-ci par le premier reste, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne un reste indépendant de $x$, qu'on égalera à zéro. Ce reste est

$$z^6 - 42z^4 + 441z^2 - 49 = 0$$

L'équation aux carrés des différences résulte de la précédente par l'hypothèse

$$y = z^2$$

elle sera donc

$$y^3 - 42y^2 + 441y - 49 = 0$$

et posant, comme dans la théorie générale,

$$y = \frac{1}{u}$$

on formera l'équation

$$u^3 - 9u^2 + \frac{42}{49}u - \frac{1}{49} = 0$$

qui donne 10 pour la limite des plus grandes racines positives; en sorte que $\frac{1}{\sqrt{10}}$ est un nombre plus petit que la plus petite différence entre les racines de la proposée.

La méthode de *Newton* appliquée à l'équation en $u$ donne une limite plus rapprochée : pour l'obtenir, on fera

$$u = 1 + l$$

et il s'agira de trouver un nombre $l$ qui donne pour

$$3l - 9,\ 3l^2 - 18l + \frac{42}{49},\ l^3 - 9l^2 + \frac{42}{49}l - \frac{1}{49}$$

des résultats positifs, conditions auxquelles satisfait $l = 9$; donc $\frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$ est la limite cherchée ou la différence entre les substitutions successives. Restera à trouver les limites

qui comprennent les racines positives de la proposée : à cet effet, on a

$$\sqrt{5}+1=\sqrt{7}+1=3, \text{ etc.}$$

parce qu'il se trouve deux termes positifs $x^3+0x^2$ avant le premier terme négatif $-7x$, on pourra donc prendre 4 pour la limite supérieure. Pour avoir la limite inférieure, on fera dans la proposée

$$x=\frac{1}{y}$$

ce qui donne

$$y^3-y^2+\frac{1}{7}=0$$

d'où on déduit

$$\frac{1}{5'+1}=\frac{1}{2}<x$$

en sorte que les limites entre lesquelles il faut substituer, sont $\frac{1}{2}$ et 4, et la différence des nombres à substituer est $=\frac{1}{2}$. Pour éviter les fractions, on fera dans la proposée

$$x=\frac{x'}{3}$$

ce qui la change dans la suivante

$$x'^3-63x'+189=0$$

alors, au lieu des limites $\frac{1}{2}$ et 4, on prendra $\frac{1}{2}$ ou 1 et 12, puis l'unité pour la différence des nombres à substituer, et on formera le tableau suivant :

$x'=1$.....Résultats $=+127$
$x'=2$.....$=+71$
$x'=3$.....$=+27$
$x'=4$.....$=+1$
$x'=5$.....$=-1$
$x'=6$.....$=+27$
$x'=7$.....$=+91$

$x'=8$ rendant le premier terme plus grand que le terme négatif, il n'est pas nécessaire d'aller au-delà. On conclut de ce tableau

$x'>4$ et $x'<5$, d'où $x>\frac{4}{3}$ et $<\frac{1}{3}$
$x>5$ et $x'<6$, d'où $x>\frac{5}{3}$ et $<\frac{6}{3}$

Pour procéder à la recherche des racines négatives, on changera les signes des puissances impaires de $x$ dans la

proposée, ce qui donnera

$$-x^3+7x+7=0\text{ , ou }x^3-7x-7=0$$

équation dont les racines positives seront encore $\frac{1}{2}$ et 4, ou bien 1 et 12 pour la transformée

$$x'^3-63x'-189=0$$

dont les racines ont avec celles de la précédente la relation

$$x=\frac{x'}{3}$$

et la différence des nombres à substituer sera l'unité ; mais pour réduire le nombre des substitutions, on fera les hypothèses

$x' = 12$.....Résultats $= +783$
$x' = 11$.....$= +449$
$x' = 10$.....$= +181$
$x' = 9$.....$= -47$

d'où on conclut

$$x'>9 \text{ et } x'<10 \text{ d'où } x>3 \text{ et } x<3+\tfrac{1}{3}$$

il existe donc une racine négative comprise entre $-3$ et $-(3+\frac{1}{3})$.

## *Méthode pour obtenir les racines d'une équation avec une approximation déterminée.*

On obtient, au moyen des règles précédentes, autant de couples de nombres qui, substitués en place de l'inconnue, donnent des résultats de signes contraires, que l'équation proposée contient de racines réelles. Soient $a$ et $b$ deux de ces substitutions qui donnent des résultats de signes contraires ; en prenant l'un de ces nombres pour racine, on commettra une erreur plus petite que la différence $a-b$, en sorte que cette différence étant $\frac{1}{k}$, on aura déjà la valeur de la racine à moins de la fraction $\frac{1}{k}$ près. Pour en approcher d'avantage, on prendra un moyen arithmétique entre les nombres $a$ et $b$, lequel, substitué pour $x$, donnera un résultat dont le signe différera nécessairement de celui de l'un ou de l'autre des résultats dus aux substitutions $x=a$ et $x=b$ ; la racine se trouvera donc comprise entre deux limites plus rapprochées. En continuant la même

opération, les limites seront de plus en plus resserrées et conséquemment l'erreur qu'on commettra en prenant l'une de ces limites pour la racine, s'atténuera de plus en plus.

On approchera plus rapidement de la valeur exacte des racines en employant la méthode suivante : soit

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Tx + V = 0 \ldots (M)$$

l'équation proposée ; si $a$ est une première approximation de l'une des racines, on fera

$$x = a + p$$

et on aura, par cette substitution, une transformée en $p$ qui, à commencer par le dernier terme, sera de la forme

$$X + Yp + Zp^2 + \ldots p^m = 0 \ldots (N)$$

où les quantités $X$, $Y$, $Z$, etc., seront des fonctions de $a$, qu'on obtiendra en changeant $x$ en $a$ dans les équations (page 64), et tenant compte de la différence des signes : on aura donc

$$X = a^m + Aa^{m-1} + Ba^{m-2} + Ca^{m-3} + \text{etc.}$$

$$Y = ma^{m-1} + (m-1)Aa^{m-2} + (m-2)Ba^{m-3} + \text{etc.}$$

etc.

Comme $p$ est, par hypothèse, une fraction assez petite, les puissances $p^2$, $p^3$, etc., seront beaucoup plus petites que $p$, et d'après cette considération, on pourra négliger les puissances de $p$ supérieures à la première, en sorte que la transformée $(N)$ se réduira aux deux premiers termes. On pourra donc déduire une première valeur approchée de $p$ de l'équation

$$p = -\frac{X}{Y} = b \ldots (1)$$

en désignant par $b$ cette première approximation de $p$. Pour avoir une valeur plus approchée de la racine, ou pour corriger la valeur de $b$, on écrira dans $(N)$ $b+q$, au lieu de $p$, ce qui revient à faire

$$x = a + b + q$$

dans $(M)$, ou à changer $p$ en $q$ dans la transformée $(N)$, et $a$ en $a+b$ dans les fonctions $X$, $Y$, $Z$, etc. Ainsi, ayant trouvé précédemment l'expression de $p$ en $a$, on aura celle de $q$ en changeant $a$ en $a+b$ dans $-\frac{X}{Y}$, ce qu'on notera de cette manière :

$$q = -\frac{(X)}{(Y)} = c \ldots (2)$$

et $a+b+c$ sera une plus grande approximation. En changeant $a$ en $a+b+c$ dans $X$ et $Y$, qu'on notera par $[X]$ et $[Y]$; puis écrivant $r$ pour $p$ dans $(N)$, et ne retenant que les deux premiers termes, on aura

$$r = -\frac{[X]}{[Y]} = d \ldots . \quad (3)$$

et $a+b+c+d$ sera une valeur plus approchée de la racine cherchée. Nous ferons une application de cette méthode à l'équation

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

qui n'a qu'une seule racine réelle comprise entre 2 et 3. Dans cette exemple,

$$X = a^3 - 2a - 5 = -1$$
$$Y = 3a^2 - 2 = 10$$

on a donc

$$p = -\frac{a^3 - 2a - 5}{3a^2 - 2} = b = 0{,}1$$

en sorte que

$$a + b = 2{,}1$$

faisant $a = 2{,}1$ dans $p$, on trouvera

$$q = -0{,}0054 = c$$

donc

$$a + b + c = 2{,}0946$$

Ecrivant ensuite 2,0946 pour $a$ dans $p$, il viendra

$$r = -0{,}00004853 = d$$

et conséquemment

$$a + b + c + d = 2{,}09455147$$

Ainsi les valeurs convergentes vers la racine sont

2; 2,1; 2,0946; 2,09455147; etc.

## *Méthode d'approximation des racines des équations numériques par les fractions continues.*

Soit l'équation

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \text{etc.} \ldots\ldots = 0 \ldots\ldots (M)$$

et supposons qu'on ait trouvé, par les méthodes précédentes,

les valeurs entières immédiatement en dessous des racines cherchées; si $p$ est l'une de ces valeurs, en sorte qu'on ait

$$x > p \text{ et } x < p + 1$$

on posera

$$x = p + \frac{1}{y}$$

où $y$ est un nombre plus grand que l'unité, et substituant pour $x$ cette valeur dans la proposée, on trouvera, après avoir multiplié l'équation résultante par $y^m$,

$$A'y^m + B'y^{m-1} + C'y^{m-2} + D'y^{m-3} + \text{etc.} \ldots = 0 \ldots . (N)$$

équation qui aura nécessairement, au moins, une racine réelle plus grande que l'unité. Soit $q$ la valeur entière en dessous de $y$, on fera

$$y = q + \frac{1}{z}$$

$z$ étant un nombre plus grand que l'unité; substituant dans $(N)$, on aura une équation en $z$ de la forme

$$A''z^m + B''z^{m-1} + C''z^{m-2} + D''z^{m-3} + \text{etc.} \ldots = 0 \ldots . (P)$$

laquelle aura nécessairement au moins une racine réelle plus grande que l'unité dont on pourra trouver de même une valeur entière approchée par défaut, que nous désignerons par $r$; en sorte qu'on aura

$$z = r + \frac{1}{u}$$

où $u$ désigne un nombre plus grand que l'unité. Substituant dans $(P)$, il viendra une équation en $u$ ayant, au moins, une racine réelle plus grande que l'unité, et ainsi de suite.

On traitera successivement de la même manière les valeurs entières approchées $p'$, $p''$, $p'''$, etc., des racines réelles et positives de la proposée, pour approcher d'avantage de la véritable valeur de chacune d'elles.

Les racines positives et plus grandes que l'unité des transformées $(N)$, $(P)$, etc., seront nécessairement incommensurables, si on a débarrassé la proposée des racines commensurables qu'elle peut contenir. En effet, s'il arrivoit qu'un des nombres $p$, $q$, $r$, etc. fût une racine exacte, alors on auroit

$$x = p, \text{ ou } y = q, \text{ ou } z = r, \text{ etc.}$$

ensorte que l'opération se termineroit : on trouveroit donc pour $x$ un nombre commensurable, ce qui est contre l'hypothèse.

Si les nombres $p$, $p'$, $p''$, etc., sont tous différens, alors chacune des transformées $(N)$, $(P)$, etc., n'aura qu'une seule racine réelle plus grande que l'unité ; car si par exemple, la transformée $(N)$ avoit deux racines réelles plus grandes que l'unité, telles que $y'$ et $y''$, on auroit

$$x = p + \frac{1}{y'} \text{ et } x = p + \frac{1}{y''}$$

de sorte que ces deux valeurs de $x$ auroient la même valeur entiere approchée $p$, ce qui est contre l'hypothèse. Il en seroit de même, si la transformée $(P)$ ou l'une des suivantes avoit deux racines réelles plus grandes que l'unité : d'où il suit que pour trouver, dans ce cas, les valeurs entières approchées des transformées successives, il suffira de substituer successivement, au lieu de l'inconnue, les nombres naturels 0, 1, 2, 3, etc. à partir de celui immédiatement moindre que la limite des plus petites racines positives de la transformée sur laquelle on opère, jusqu'à ce qu'on obtienne deux résultats de signes différens.

Si deux valeurs de $x$ ont une même valeur entière approchée $p$, alors en employant cette valeur, les transformées $(N)$ et $(P)$ etc. auront chacune deux racines réelles plus grandes que l'unité, jusqu'à ce qu'on arrive à une équation dont les racines plus grandes que l'unité aient des valeurs entières approchées différentes ; alors chacune de ces deux valeurs donnera naissance à une suite d'équations transformées dont chacune n'aura plus qu'une seule racine réelle plus grande que l'unité. En effet, puisqu'il existe deux valeurs différentes de $x$, qui ont la même valeur approchée $p$, il faudra que $y$ dans $(N)$ ait deux valeurs réelles plus grandes que l'unité, et si ces deux valeurs de $y$ ont la même valeur entière approchée $q$, il faudra de nouveau qu'en faisant $y = q + \frac{1}{z}$, la transformée en $z$ ait deux valeurs différentes plus grandes que l'unité, et ainsi de suite. Mais si les deux valeurs entières approchées de $y$ étoient différentes, alors nommant ces valeurs $q$ et $q'$, on feroit

$$y = q + \frac{1}{z} \text{ et } y = q' + \frac{1}{z}$$

ce qui donneroit lieu à deux transformées telles que $(P)$, dont chacune ne devroit plus avoir qu'une seule racine réelle plus grande que l'unité : autrement, les deux valeurs de $y$,

au lieu d'être doubles seulement, seroient triples, quadruples, etc. : on auroit donc

$$x = p + \frac{1}{y'} ; x = p + \frac{1}{y''} ; x = p + \frac{1}{y'''}$$

ainsi la proposée auroit plus de deux racines réelles et positives ayant chacune la même valeur entière approchée $p$ ; ce qui est contre l'hypothèse. Donc, à partir de la transformée dont les deux racines plus grandes que l'unité auront des valeurs entières différentes, les transformées résultantes de chacune de ces valeurs n'auront plus qu'une seule racine réelle plus grande que l'unité : il ne sera donc pas nécessaire, pour obtenir les valeurs entières approchées des racines correspondantes, de calculer pour chacune d'elles la limite de la plus petite différence entre les racines.

Les coefficiens $A'$, $B'$, $C'$, etc., de la transformée $(N)$, exprimés au moyen de ceux de la proposée, sont

$$A' = Ap^m + Bp^{m-1} + Cp^{m-2} + Dp^{m-3} + \text{etc.}$$

$$B' = mAp^{m-1} + (m-1)\,Bp^{m-2} + (m-2)\,Cp^{m-3} + (m-3)\,Dp^{m-4} + \text{etc.}$$

$$C' = m.\frac{m-1}{2}Ap^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}Bp^{m-3} + \text{etc.}$$

On obtiendra ceux de la transformée $(P)$ en écrivant dans les formules précédentes $q$ pour $p$, $A'$, $B'$, $C'$, etc. pour $A$, $B$, $C$, etc., et changeant $A'$, $B'$, $C'$, etc. en $A''$, $B''$, $C''$, etc.

Il résulte de ces expressions que l'un des coefficiens $A'$, $A''$, etc. ne sera jamais nul; car, dans le cas de

$$A' = 0, \text{ ou } A'' = 0, \text{ etc.}$$

on auroit

$$y = \infty, \text{ ou } z = \infty, \text{ etc.}$$

donc

$$x = p, \text{ ou } y = q, \text{ etc.}$$

et conséquemment la valeur correspondante de $x$ seroit commensurable.

Soient donc $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, etc. les valeurs entières approchées des équations $(M)$, $(N)$, $(P)$, etc., en sorte qu'on ait

$$x = p + \frac{1}{y}, y = q + \frac{1}{z}, z = r + \frac{1}{u}, \text{ etc.}$$

on trouvera, par des substitutions successives,

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \text{etc.}}}}$$

La fraction qui accompagne l'entier $p$ se nomme *fraction continue* : on comprend, en général, sous ce nom toute fraction dont le dénominateur est composé d'un entier plus une fraction, lequel a encore pour dénominateur un entier plus une fraction, et ainsi de suite. Ainsi on reconnoîtra les avantages que présente la méthode précédente, en examinant les principales propriétés de ces sortes de fractions.

## *Génération des fractions continues, leur réduction en fractions ordinaires, et quelques propriétés de ces fractions.*

Supposons qu'on ait à évaluer un nombre quelconque $a$ qui ne soit pas un nombre entier : on prendra le nombre entier immédiatement au-dessous de $a$, et qui conséquemment différera de $a$ d'une fraction plus petite que l'unité ; soit $\alpha$ ce nombre, $a - \alpha$ sera une fraction comprise entre 0 et 1 ; de sorte que $\frac{1}{a-\alpha}$ sera un nombre plus grand que l'unité, et le désignant par $b$, on aura

$$\frac{1}{a-\alpha} = b \ldots . (1).$$

On pourra donc chercher le nombre entier qui approchera le plus, en moins, de $b$ ; ce nombre étant $\beta$, on aura de même $b - \beta$, fraction comprise entre 0 et 1, et conséquemment

$$\frac{1}{b-\beta} = c \ldots . (2),$$

$c$ étant un nombre plus grand que l'unité. On soustraira de même de $c$ le plus grand nombre entier qu'il contienne, nombre que nous désignerons par $\gamma$ : alors $c - \gamma$ sera une fraction comprise entre 0 et 1, et

$$\frac{1}{c-\gamma} = d \ldots . (3)$$

sera un nombre plus que l'unité, et ainsi de suite. Des égalités (1), (2), (3), etc., on déduira les suivantes :

$$a = \alpha + \frac{1}{b}\,;\; b = \beta + \frac{1}{c}\,;\; c = \gamma + \frac{1}{d}\,;\text{ etc.,}$$

et conséquemment

$$a = \alpha + \frac{1}{b}\,;\; a = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{c}}\,;$$

$$a = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{d}}}\,;\; a = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \cfrac{1}{c}}}}$$

Si parmi les quantités $a, b, c, d$, etc., il s'en trouve une qui soit un nombre entier, alors la fraction continue sera terminée, parce qu'on pourra y conserver ce nombre même. Si, par exemple, $c$ est un nombre entier, la fraction continue qui représente le nombre $a$, sera

$$a = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{c}}$$

En effet, si on substitue pour $d$ sa valeur (3) dans la troisième fraction continue, on aura

$$a = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\cfrac{1}{c-\gamma}}}} = \alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma + c - \gamma}$$

$$= \alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$$

puisque $c = \gamma$. Cette circonstance aura lieu dans le cas de $a$ nombre commensurable; mais lorsque $a$ sera un nombre incommensurable, la fraction continue ira nécessairement à l'infini.

Appliquons ce procédé au développement en fraction continue de la fraction ordinaire $\frac{A}{B}$, $A$ et $B$ étant des nombres entiers. Il est d'abord évident que le nombre entier $\alpha$, qui approche le plus, en moins, de la fraction $\frac{A}{B}$, est le quotient de la division de $A$ par $B$, le nombre $A$ étant plus grand

que $B$. Supposant cette division faite, et nommant le quotient $\alpha$ et $C$ le reste, on aura

$$\frac{A}{B} - \alpha = \frac{C}{B}, \text{ d'où } b = \frac{B}{C}$$

Pour avoir de même la valeur entière approchée $\zeta$ de la fraction $\frac{B}{C}$, il faudra diviser $B$ par $C$, et prendre pour $\zeta$ le quotient en nombre entier de cette division; alors nommant $D$ le reste, on aura

$$\frac{B}{C} - \zeta = \frac{D}{C}, \text{ d'où } c = \frac{C}{D}$$

On continuera donc à diviser $C$ par $D$, et le quotient sera $\gamma$, et ainsi de suite: d'où résulte cette règle fort simple pour réduire les fonctions ordinaires en fractions continues.

*Divisez le numérateur de la fraction proposée par son dénominateur, et nommez le quotient $\alpha$; divisez ensuite le dénominateur par le reste, et nommez le quotient $\zeta$; divisez le premier reste par le second reste, et soit le quotient $\gamma$; continuez ainsi en divisant toujours l'avant-dernier reste par le dernier, jusqu'à ce qu'il se présente une division qui se fasse sans reste, ce qui doit arriver ici, et vous aurez la fraction continue,*

$$\frac{A}{B} = \alpha + \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \text{etc.}$$

Pour repasser d'une fraction continue à la fraction ordinaire qui lui a donné naissance, on fera les réductions successives

$$\alpha = \frac{\alpha}{1}; \quad \alpha + \frac{1}{\zeta} = \frac{\alpha\zeta + 1}{\zeta}; \quad \alpha + \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\zeta\gamma + \gamma + \alpha}{\zeta\gamma + 1};$$

$$\alpha + \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = \frac{\alpha\zeta\gamma\delta + \gamma\delta + \alpha\delta + \alpha\zeta + 1}{\zeta\gamma\delta + \delta + \zeta};$$

etc.

En examinant ces résultats, on découvrira facilement que le numérateur de chacune des fractions ainsi formées, est égal à la somme du numérateur de la fraction qui précède, multiplié par le nouveau quotient, ou par le dernier quotient introduit, plus le numérateur de l'antépénultième fraction, et que le dénominateur de chaque fraction se forme suivant la même loi; en sorte que $\frac{P^0}{Q^0}$, $\frac{P}{Q}$ étant deux fractions consécutives et $\mu$ le nouveau quotient introduit, ou le dernier

des quotiens qui entrent dans la fraction $\frac{P'}{Q'}$ qui suit immédiatement $\frac{P}{Q}$, on aura

$$\frac{P'}{Q'} = \frac{P\mu + P^\circ}{Q\mu + Q^\circ}$$

Pour démontrer que cette loi a lieu dans toute l'étendue de la fraction continue, supposons qu'elle ait été vérifiée jusqu'à un certain quotient $\mu$ : soit $\frac{P'}{Q'}$ la fraction corrrespondante, $\frac{P}{Q}$ la fraction qui precède, et $\frac{P^\circ}{Q^\circ}$ l'antépénultième fraction, on aura

$$P' = P\mu + P^\circ$$
$$Q' = Q\mu + Q^\circ$$

Si on considère le quotient $\mu'$ qui suit immédiatement le quotient $\mu$, et que $\frac{P''}{Q''}$ soit la valeur de la fraction continue calculée jusqu'au quotient $\mu'$ inclusivement, l'expression analytique de $\frac{P''}{Q''}$ sera ce que devient celle de $\frac{P'}{Q'}$ lorsqu'à la place de $\mu$ on écrit $\mu + \frac{1}{\mu'}$; donc

$$\frac{P''}{Q''} = \frac{P\left(\mu + \frac{1}{\mu'}\right) + P^\circ}{Q\left(\mu + \frac{1}{\mu'}\right) + Q^\circ} = \frac{(P\mu + P^\circ)\,\mu' + P}{(Q\mu + Q^\circ)\,\mu' + Q} = \frac{P'\mu' + P}{Q'\mu' + Q}$$

Donc la fraction $\frac{P''}{Q''}$ se déduira des deux précédentes $\frac{P'}{Q'}$ et $\frac{P}{Q}$ et du quotient $\mu'$ répondant à $\frac{P''}{Q''}$ suivant la loi

$$P'' = P'\mu' + P$$
$$Q'' = Q'\mu' + Q$$

Cette loi de formation aura donc lieu dans toute l'étendue de la fraction continue.

Avant donc écrit par ordre les quotiens $\alpha, \zeta, \gamma, \delta$, etc. on formera facilement les fractions correspondantes de cette manière :

$$\frac{\alpha}{1}; \frac{\zeta}{1}; \frac{\alpha\zeta + 1}{\zeta}; \frac{\gamma}{\alpha\zeta\gamma + \gamma + \alpha}; \frac{\delta}{\zeta\gamma + 1}; \frac{\varepsilon}{\alpha\zeta\gamma\delta + \gamma\delta + \alpha\delta + \alpha\zeta + 1}; \frac{\alpha\zeta\gamma\delta + \gamma\delta + \alpha\delta + \alpha\zeta + 1}{\zeta\gamma\delta + \delta + \zeta}; \text{ etc.}$$

où chaque numérateur se trouve en multipliant le précédent par la lettre écrite au-dessus, et ajoutant ce produit à l'antépénultième, et procédant de la même manière pour composer le dénominateur. Pour que cette loi de formation puisse valoir à partir de la seconde fraction inclusivement, on écrit $\frac{1}{0}$ pour première fraction, quoique celle-ci ne soit pas une portion de la fraction continue. On aura donc, en représentant par $A$, $B$, $C$, etc. les numérateurs de ces fractions successives, et par $A'$, $B'$, $C'$, etc. les dénominateurs des mêmes fractions,

$$\begin{aligned} A &= \alpha & A' &= 1 \\ B &= A\mathfrak{C} + 1 & B' &= A'\mathfrak{C} \\ C &= B\gamma + A & C' &= B'\gamma + A' \\ D &= C\delta + B & D' &= C'\delta + B' \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

Les fractions résultantes $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$, etc. ont été nommées fractions convergentes, parce que, comme nous le verrons bientôt, chacune d'elle approche plus que celle qui la précède de la valeur exacte de la fraction continue.

Si la quantité $a$ qu'on veut développer en fraction continue est une fraction rationnelle $\frac{r}{r'}$, il est évident que cette fraction sera toujours la dernière dans la série des fractions convergentes; car dans ce cas la fraction continue sera terminée: mais si la quantité $a$ est irrationelle, la fraction continue se prolongeant sans jamais s'arrêter, la suite des fractions convergentes ne s'arrêtera pas non plus.

*Les fractions convergentes* $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}$, *etc. sont alternativement plus petites et plus grandes que la valeur totale de la fraction continue.* En effet, à ne considérer que la première fraction $\frac{\alpha}{1}$, on aura, en désignant par $x$ la totalité de la fraction continue.

$$x > \frac{\alpha}{1}$$

Si l'on prend $\alpha + \frac{1}{\mathfrak{C}}$, comme le dénominateur $\mathfrak{C}$ est plus petit que le dénominateur $\mathfrak{C} + \frac{1}{\gamma} + \text{etc.}$, on aura

$$x < \alpha + \frac{1}{\mathfrak{C}}$$

En

En se bornant à $\alpha + \frac{1}{c + \frac{1}{\gamma}}$, comme le dénominateur $\gamma$ est plus petit que le véritable, la fraction $\frac{1}{\gamma}$ sera trop grande, la fraction $\frac{1}{c + \frac{1}{\gamma}}$ sera trop petite, et la somme $\alpha + \frac{1}{c + \frac{1}{\gamma}}$ sera trop petite; en sorte que

$$x > \alpha + \frac{1}{c + \frac{1}{\gamma}}$$

et ainsi de suite alternativement : donc la valeur de $x$ est toujours comprise entre deux fractions consécutives.

*Si on multiplie en croix les termes de deux fractions convergentes consécutives* $\frac{P^\circ}{Q^\circ}, \frac{P}{Q}$, *on aura toujours la différence des produits*

$$PQ^\circ - P^\circ Q = \pm 1$$

*savoir* $+1$ *si la fraction* $\frac{P}{Q}$ *est du nombre des fractions plus grandes que* $x$, *ou si elle est de rang impair, la fraction* $\frac{1}{0}$ *étant la premiere, et* $-1$ *si elle est une fraction plus petite ou de rang pair.*

En effet, si l'on considère trois fractions consécutives

$$\frac{P^\circ}{Q^\circ}, \frac{P}{Q}, \frac{P'}{Q'}$$

et que $\mu$ soit le quotient placé au-dessus de $\frac{P}{Q}$, ou le quotient correspondant à $\frac{P'}{Q'}$, on aura d'après la loi démontrée

$$P' = P\mu + P^\circ$$
$$Q' = Q\mu + Q^\circ$$

d'où resulte

$$P'Q - PQ' = P^\circ Q - PQ^\circ = -(PQ^\circ - P^\circ Q)$$

On auroit de même, en représentant par $\frac{{}'P}{{}'Q}$ la fraction qui précède immédiatement $\frac{P^\circ}{Q^\circ}$,

$$PQ^\circ - P^\circ Q = {}'PQ^\circ - {}'QP^\circ = -({}'QP^\circ - {}'PQ^\circ)$$

et ainsi de suite, en remontant jusqu'aux deux premières fractions $\frac{1}{0}$ et $\frac{\alpha}{1}$, qui sont comprises dans la loi, et pour lesquelles la différence analogue est $\alpha \times 0 - 1 \times 1 = -1$; en sorte que

$$BA' - B'A = +1$$
$$CB' - C'B = -1$$

On peut déduire de cette propriété plusieurs conséquences importantes : on en conclura d'abord que les fractions $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}$, etc. sont déjà réduites à la plus simple expression, car si $C$ et $C'$, par exemple, avoient un commun diviseur autre que l'unité, il faudroit, d'après la propriété

$$BC' - B'C = +1$$

que l'unité fût aussi divisible par ce commun diviseur ; conclusion qu'on déduiroit de la même égalité à l'égard de $\frac{B}{B'}$.

Evaluons maintenant la différence entre une fraction quelconque et la valeur $x$ de la fraction continue totale. Pour cela soient toujours $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P'}{Q'}$ deux fractions consécutives, et $\mu$ le quotient qui correspond à $\frac{P'}{Q'}$ ; en sorte que

$$\frac{P'}{Q'} = \frac{P\mu + P^0}{Q\mu + Q^0}$$

Si, à la place de $\mu$, on écrit le reste de la fraction continue, à partir de $\mu$ inclusivement, on aura, en désignant ce reste par $y$, et la totalité de la fraction continue par $x$,

$$x = \frac{Py + P^0}{Qy + Q^0}$$

d'où on déduit

$$x - \frac{P}{Q} = \frac{P^0 Q - P Q^0}{Q(Qy + Q^0)} = \mp \frac{1}{Q(Qy + Q^0)}$$

et

$$x - \frac{P^0}{Q^0} = \frac{(PQ^0 - P^0 Q)y}{Q^0(Qy + Q^0)} = \pm \frac{y}{Q^0(Qy + Q^0)}$$

Les différences $x - \frac{P}{Q}$ et $x - \frac{P^0}{Q^0}$ sont donc toujours de signes contraires, et conséquemment la valeur de $x$ est comprise entre deux fractions consécutives, propriété déjà démontrée plus haut.

Soit $\mu$ le nombre entier immédiatement moindre que $y$, en sorte qu'on ait

$$y > \mu \text{ et } y < \mu + 1$$

on aura aussi

$$Qy + Q^0 > Q\mu + Q^0 \text{ et } Qy + Q^0 < Q(\mu + 1) + Q^0$$

donc

$$x - \frac{P}{Q} < \mp \frac{1}{Q(Q\mu + Q^0)} \text{ ou } < \mp \frac{1}{QQ'}$$

et

$$x - \frac{P}{Q} > \mp \frac{1}{Q\,[Q\,(\mu+1)+Q^0]} \text{ ou } > \mp \frac{1}{Q\,(Q'+Q)}$$

*Ainsi l'erreur qu'on commettra en prenant une fraction en place de la fraction continue totale sera toujours moindre que l'unité divisée par le produit des dénominateurs de cette fraction et de la fraction immédiatement consécutive, mais plus grande que l'unité divisée par la somme du même produit et du carré du dénominateur de la fraction sur laquelle on opère.*

Or les quotiens $\alpha$, $\zeta$, $\gamma$, etc. étant des nombres entiers et positifs, on a

$$Q^0 < Q,\ Q < Q',\ \text{donc } QQ' > Q^2 \text{ et } \frac{1}{QQ'} < \frac{1}{Q^2} \text{ etc.}$$

donc, à plus forte raison,

$$x - \frac{P}{Q} < \mp \frac{1}{QQ}$$

c'est-à-dire que *l'erreur commise en prenant une fraction quelconque pour la fraction totale, est toujours moindre que l'unité divisée par le carré du dénominateur de cette fraction.*

Des équations trouvées précédemment

$$x - \frac{P}{Q} = \mp \frac{1}{Q\,(Qy+Q^0)}$$

$$x - \frac{P^0}{Q^0} = \pm \frac{y}{Q^0\,(Qy+Q^0)}$$

on déduit

$$P - Qx = \pm \frac{1}{Qy+Q^0}$$

$$-P^0 + Q^0 x = \pm \frac{y}{Qy+Q^0}$$

d'où

$$\frac{P-Qx}{-P^0+Q^0x} = \frac{1}{y}$$

or $y$, par sa définition, est un nombre plus grand que l'unité, donc

$$\frac{P-Qx}{Q^0x-P^0} < 1, \text{ d'où } P - Qx < Q^0x - P^0$$

et, à plus forte raison,

$$\frac{P}{Q} - x < x - \frac{P^0}{Q^0}$$

*Donc la différence entre la fraction continue totale $x$ et une frration quelconque est moindre que la différence entre $x$ et la fraction qui précède immédiatement celle-là.* Cette pro-

priété a fait donner à ces fractions successives $\frac{P''}{Q''}$, $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$, etc. le nom de fractions convergentes

*Soit* $\frac{M}{N}$ *une fraction dont le dénominateur N soit moindre que le dénominateur Q d'une des fractions convergentes* $\frac{P}{Q}$, je dis que *la fraction* $\frac{P}{Q}$ *exprimera plus exactement la valeur de x que la fraction* $\frac{M}{N}$.

La proposition se réduit donc à faire voir que la fraction $\frac{M}{N}$ ne peut être intercalée entre deux fractions consécutives $\frac{P}{Q}$, $\frac{P''}{Q''}$ entre lesquelles se trouve la fraction totale $x$.

Pour que la fraction $\frac{M}{N}$ se trouvât entre $\frac{P}{Q}$ et $x$, il faudroit qu'on eût

$$\frac{P}{Q} - \frac{M}{N} < \frac{P}{Q} - x, \text{ et, } \textit{à fortiori}, \frac{P}{Q} - \frac{M}{N} < \frac{1}{Q^2}$$

abstraction faite du signe, ou qu'en réduisant le premier membre au même dénominateur, on eût

$$\frac{PN - QM}{QN} < \frac{1}{Q^2}$$

Or $P$, $Q$, $M$ et $N$ étant des nombres entiers, le numérateur $PN - QM$ ne peut être, abstraction faite du signe, un nombre moindre que l'unité : on a d'ailleurs, par hypothèse,

$$N < Q \text{ et } NQ < Q^2$$

donc on aura au contraire,

$$\frac{PN - QM}{QN} > \frac{1}{Q^2}.$$

donc $\frac{M}{N}$ ne peut se trouver entre $\frac{P}{Q}$ et $x$. Pour que $\frac{M}{N}$ tombât entre $x$ et $\frac{P'}{Q'}$, il faudroit qu'on eût

$$\frac{P'}{Q'} - \frac{M}{N} < \frac{P'}{Q'} - x < \frac{1}{Q'^2}$$

ou

$$\frac{P'N - Q'M}{Q'N} < \frac{1}{Q'^2}$$

ce qui ne peut avoir lieu, parce qu'encore le numérateur ne peut être, abstraction faite du signe, $< 1$ et parce que $N$ est, à plus forte raison, $< Q'$. La fraction $\frac{M}{N}$ ne peut

être, *à fortiori*, supposée entre les deux fractions $\frac{P''}{Q''}$ et $\frac{P'''}{Q'''}$, $\frac{P''}{Q''}$ et $\frac{P''''}{Q''''}$ etc.; donc elle ne pourra exprimer la valeur de $x$ plus exactement que la fraction $\frac{P}{Q}$.

*Donc chaque fraction convergente exprime la valeur de x plus exactement que toute autre fraction dont le dénominateur seroit moindre que celui de la fraction qu'on considère.*

Les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$ etc..... $\frac{P^0}{Q^0}$, $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$ etc. ont été appellées fractions principales, parce qu'elles convergent le plus qu'il est possible vers la valeur $x$ de la fraction continue. On a vu qu'elles étoient alternativement plus petites et plus grandes que $x$; ainsi on pourra les séparer en deux classes

$$\frac{A}{A'}, \frac{C}{C'}, \frac{E}{E'} \text{ etc.}$$

$$\frac{B}{B'}, \frac{D}{D'}, \frac{F}{F'} \text{ etc.}$$

la première sera composée de fractions toutes plus petites que $x$ et qui iront en augmentant vers $x$; la seconde, de fractions toutes plus grandes que $x$, mais qui iront en diminuant vers cette quantité.

Examinons maintenant chacune de ces deux séries en particulier. Dans la première on aura

$$\frac{C}{C'} - \frac{A}{A'} = \frac{CA' - AC'}{A'C'} = \frac{A'(B\gamma + A) - A(B'\gamma + A')}{A'C'} = \frac{\gamma}{A'C'}$$

$$\frac{E}{E'} - \frac{C}{C'} = \frac{EC' - E'C}{C'E'} = \frac{C'(D\iota + C) - C(D'\iota + C')}{C'E'} = \frac{\iota}{C'E'}$$

etc.

Dans la seconde, on aura

$$\frac{B}{B'} - \frac{D}{D'} = \frac{BD' - B'D}{B'D'} = \frac{B(C'\delta + B') - B'(C\delta + B)}{B'D'} = \frac{\delta}{B'D'}$$

$$\frac{D}{D'} - \frac{F}{F'} = \frac{DF' - FD'}{F'D'} = \frac{D(E'\zeta + D') - D'(E\zeta + D)}{F'D'} = \frac{\zeta}{F'D'}$$

etc.

Si les nombres $\gamma$, $\delta$, $\iota$, etc. sont tous égaux à l'unité, il sera impossible qu'entre deux fractions consécutives quelconques de l'une ou de l'autre des séries précédentes, il se trouve au-

cune autre fraction dont le dénominateur tombe entre ceux de ces fractions, ou, en général, dont le dénominateur soit moindre que le plus grand des deux dénominateurs : en effet, représentant par $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$ deux des fractions consécutives ci-dessus, on a

$$\frac{b}{b'} - \frac{a}{a'} = \frac{1}{a'b'}$$

donc pour que la fraction $\frac{m}{n}$ tombât entre $\frac{a}{a'}$ et $\frac{b}{b'}$, il faudroit qu'on eût

$$\frac{a'b - ab'}{a'b'} = \frac{1}{a'b'} > \frac{m}{n} - \frac{a}{a'} > \frac{ma' - na}{na'}$$

or le numérateur $ma' - na$ ne peut être, abstraction faite du signe, plus petit que l'unité ; d'ailleurs $n$ est, par hypothèse, plus petit que $b'$, donc on ne peut avoir

$$\frac{ma' - na}{na'} < \frac{1}{a'b'}$$

Mais il n'en sera plus ainsi lorsque les nombres $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ etc. seront différens de l'unité ; car supposons, par exemple, que $\gamma$ soit 4, on aura

$$C = 4B + A$$
$$C' = 4B' + A'$$

et on pourra, entre les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$, insérer les trois fractions intermédiaires

$$\frac{B + A}{B' + A'}, \frac{2B + A}{2B' + A'}, \frac{3B + A}{3B' + A'}$$

Or il est clair que les dénominateurs de ces fractions forment une suite croissante par différences égales depuis $A'$ jusqu'à $C'$, et les numérateurs depuis $A$ jusqu'à $C$, et nous allons voir que les fractions elles-mêmes croissent aussi continuellement depuis $\frac{A}{A'}$ jusqu'à $\frac{C}{C'}$, en sorte qu'il seroit maintenant impossible d'insérer dans la série

$$\frac{A}{A'}, \frac{B + A}{B' + A'}, \frac{2B + A}{2B' + A'}, \frac{3B + A}{3B' + A'}, \frac{4B + A}{4B' + A'} = \frac{C}{C'}$$

aucune fraction dont la valeur tombât entre celles de deux fractions consécutives, et dont le dénominateur se trouvât aussi entre ceux des mêmes fractions ; car si on prend les différences entre les fractions précédentes, on aura, à cause de $BA' - AB' = 1$

$$\frac{A+B}{B'+A'} - \frac{A}{A'} = \frac{1}{A'(B'+A')}$$

$$\frac{2B+A}{2B'+A'} - \frac{B+A}{B'+A'} = \frac{1}{(B'+A')(2B'+A')}$$

$$\frac{3B+A}{3B'+A'} - \frac{2B+A}{2B'+A'} = \frac{1}{(2B'+A')(3B'+A')}$$

$$\frac{C}{C'} - \frac{3B+A}{3B'+A'} = \frac{1}{(B'+A')C'}$$

d'où l'on voit d'abord que les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B+A}{B'+A'}$ etc. vont en augmentant, puisque leurs différences sont toutes positives; ensuite comme ces différences sont égales à l'unité divisée par le produit des deux dénominateurs, il est impossible qu'entre deux fractions consécutives de la série précédente, il puisse tomber une fraction quelconque $\frac{m}{n}$, si le dénominateur $n$ tombe entre les dénominateurs de ces fractions, ou, en général, s'il est plus petit que le plus grand des deux dénominateurs, comme nous l'avons démontré précédemment. De plus, comme les fractions dont il s'agit sont toutes plus petites que la vraie valeur de $x$, et que la fraction $\frac{B}{B'}$ est plus grande, il est évident que chacune de ces fractions approchera plus de $x$ que de $\frac{B}{B'}$: or on trouve

$$\frac{A}{A'} - \frac{B}{B'} = \frac{-1}{A'B'}$$

$$\frac{B+A}{B'+A'} - \frac{B}{B'} = \frac{-1}{(B'+A')B'}$$

$$\frac{2B+A}{2B'+A'} - \frac{B}{B'} = \frac{-1}{(2B'+A')B'}$$

$$\frac{3B+A}{3B'+A'} - \frac{B}{B'} = \frac{-1}{(3B'+A')B'}$$

$$\frac{C}{C'} - \frac{B}{B'} = \frac{-1}{C'B'}$$

donc puisque ces différences sont aussi égales à l'unité divisée par le produit des dénominateurs, on pourra prouver de la même manière que ci-dessus qu'aucune fraction $\frac{m}{n}$ ne pourra tomber entre une quelconque des fractions $\frac{A}{A'}, \frac{B+A}{B'+A'}, \frac{2B+A}{2B'+A'}$ etc. et la fraction $\frac{B}{B'}$, si le dénominateur $n$ est plus petit que celui de la même fraction, d'où il suit

*que chacune de ces fractions approche plus de la valeur de x que ne pourroit en approcher toute autre fraction moindre que x et qui auroit un dénominateur plus petit, c'est-à-dire, qui seroit conçue en termes plus simples.*

Nous n'avons considéré que les fractions intermédiaires entre $\frac{A}{A'}$ et $\frac{C}{C'}$: il en sera de même des fractions intermédiaires entre $\frac{C}{C'}$ et $\frac{E}{E'}$, entre $\frac{E}{E'}$ et $\frac{G}{G'}$, si $\varepsilon, \eta$ etc. sont des nombres plus grands que l'unité.

On peut aussi appliquer à l'autre série $\frac{B}{B'}, \frac{D}{D'}, \frac{F}{F'}$ tout ce que nous venons de dire relativement à la première série $\frac{A}{A'}, \frac{C}{C'}$ etc. de sorte que si les nombres $\delta$, $\zeta$, etc. sont plus grands que l'unité, on pourra insérer entre les fractions $\frac{B}{B'}$ et $\frac{D}{D'}$ entre $\frac{D}{D'}$ et $\frac{F}{F'}$ etc. différentes fractions intermédiaires toutes plus grandes que $x$, mais qui iront continuellement en diminuant et qui seront telles qu'elles exprimeront la quantité $x$ plus exactement que ne pourroit faire toute autre fraction plus grande que $x$ et qui seroit conçue en termes plus simples.

De plus si $\zeta$ est aussi un nombre plus grand que l'unité, on pourra pareillement placer avant la fraction $\frac{B}{B'}$ les fractions $\frac{A+1}{1}, \frac{2A+1}{2}, \frac{3A+1}{3}$ etc. jusqu'à $\frac{\zeta A+1}{\zeta}$ savoir $\frac{B}{B'}$, et ces fractions auront les mêmes propriétés que les autres fractions intermédiaires. De cette manière on aura ces deux suites complettes de fractions convergentes vers la quantité $x$.

*Fractions croissantes et plus petites que x*

$$\frac{A}{A'}, \frac{B+A}{B'+A'}, \frac{2B+A}{2B'+A'} \ldots\ldots \frac{(\gamma-1)B+A}{(\gamma-1)B'+A'}$$

$$\frac{C}{C'}, \frac{D+C}{D'+C'}, \frac{2D+C}{2D'+C'} \ldots\ldots \frac{(\varepsilon-1)D'+C'}{(\varepsilon-1)D'+C'}$$

$$\frac{E}{E'}, \frac{F+E}{F'+E'} \text{ etc.}$$

*Fractions décroissantes et plus grandes que x*

$$\frac{A+1}{1}, \frac{2A+1}{2}, \frac{3A+1}{3} \ldots\ldots \frac{(\zeta-1)A+1}{\zeta-1}$$

$$\frac{B}{B'}, \frac{C+B}{C'+B'}, \frac{2C+B}{2C'+B'} \ldots\ldots \frac{(\delta-1)C+B}{(\delta-1)C'+B'}$$

$$\frac{D}{D'}, \frac{E+D}{E'+D'} \text{ etc.}$$

Si la quantité $x$ est irrationnelle, les deux séries précédentes iront à l'infini, puisque la série des fractions principales $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}$ etc. va d'elle-même à l'infini.

Les fractions intermédiaires sont appellées fractions secondaires.

Mais si la quantité $a$ est rationnelle et égale à une fraction quelconque $\frac{V}{V'}$, on a vu que la série des fractions principales sera terminée et que la dernière fraction de cette série sera la fraction $\frac{V}{V'}$, donc cette fraction terminera nécessairement aussi l'une des deux séries ci-dessus, mais l'autre série pourra toujours aller à l'infini.

En effet, supposons que $\delta$ soit le dernier dénominateur de la fraction continue, $\frac{D}{D'}$ sera la dernière des fractions principales, et la série des fractions plus grandes que $x$ se trouvera terminée par cette même fraction $\frac{D}{D'}$; or l'autre série des fractions plus petites que $x$ se trouvera naturellement arrêtée à la fraction $\frac{C}{C'}$ qui précède $\frac{D}{D'}$; mais pour la continuer, il n'y a qu'à considérer que le dénominateur $\varepsilon$ qui devroit suivre le dernier dénominateur $\delta$ sera $\infty$ (page 297), de sorte que la fraction $\frac{E}{E'}$ qui suivroit $\frac{D}{D'}$ dans la suite des fractions principales seroit $\frac{\infty D + C}{\infty D' + C'} = \frac{D}{D'}$: or par la loi des fractions intermédiaires, il est clair qu'à cause de $\varepsilon = \infty$, on pourra insérer entre les fractions $\frac{C}{C'}$ et $\frac{E}{E'}$ une infinité de fractions intermédiaires qui seront

$$\frac{D+C}{D'+C'}, \frac{2D+C}{2D'+C'}, \frac{3D+C}{3D'+C'} \text{ etc.}$$

ainsi, dans ce cas, on pourra après la fraction $\frac{C}{C'}$ placer encore les fractions intermédiaires dont nous parlons.

On peut donc résoudre cette question : *une fraction exprimée par de grands nombres étant donnée, trouver toutes les fractions en moindres termes qui approchent si près de la vérité qu'il soit impossible d'en approcher davantage par des fractions plus simples.*

D'après la théorie précédente le problème sera résolu en réduisant la fraction proposée en fraction continue, puis en

formant les fractions convergentes et intercalant des fractions secondaires. ( *Voyez les additions par Lagrange à l'Algebre d'Euler* ).

Lorsqu'on développe une quantité en fraction continue, il arrive quelquefois que les mêmes dénominateurs reviennent toujours dans le même ordre; dans ce cas, la fraction continue est dite *périodique*, et elle peut toujours être considérée comme la racine d'une équation du second degré. Soit la fraction périodique

$$x = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \text{etc.}$$

puisque le nombre des fractions intégrantes est illimité, il est clair qu'on peut substituer $x$ à l'ensemble des fractions intégrantes qui suivent la première, en sorte qu'on aura

$$x = \frac{1}{p+x}, \text{ d'où } x^2 + px = 1 \text{ et } x = \frac{-p + \sqrt{p^2+4}}{2}.$$

La fraction continue ci-dessus servira donc à trouver la racine carrée du nombre $\frac{\sqrt{p^2+4}}{2}$, puisqu'on a

$$\frac{\sqrt{p^2+4}}{2} = \frac{p}{2} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \text{etc.}$$

En faisant $p = 2$, on obtient

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \text{etc.}$$

Soit encore la fraction

$$x = p + \frac{1}{q} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q,} + \text{etc.}$$

dont les dénominateurs reviennent périodiquement de deux en deux, on aura

$$x = p + \frac{1}{q} + \frac{1}{x}$$

d'où résulte l'équation du second degré

$$qx^2 - pqx + p = 0$$

Il en seroit de même, si la période étoit composée d'un plus grand nombre de termes; c'est-à-dire, qu'on seroit toujours conduit pour la détermination de $x$ à une équation du second dégré. Il peut arriver aussi que la fraction continue soit irrégulière dans ses premiers termes, et qu'elle ne devienne périodique qu'à une certaine distance du commencement. Soit, par exemple, la fraction

$$x = p + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \text{etc.}$$

et désignons par $y$ la partie périodique, ou supposons

$$y = r + \frac{1}{s} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \text{etc.}$$

on aura

$$x = p + \frac{1}{q} + \frac{1}{y}, \text{ d'où } y = \frac{x-p}{1-q(x-p)}$$

mais

$$y = r + \frac{1}{s} + \frac{1}{y}, \text{ d'où } sy^2 - rsy - r = 0$$

et remplaçant $y$ par sa valeur, il viendra

$$s(x-p)^2 - rs(x-p)[1-q(x-p)] - r[1-q(x-p)]^2 = 0$$

équation qui développée et ordonnée par rapport aux puissances de $x$, montera au second degré. En la résolvant et égalant la valeur de $x$ à la fraction continue qu'elle représente, on aura le développement en fraction continue de la racine carrée des nombres représentés par la formule qui se trouvera sous le radical.

Examinons maintenant dans quel cas une des racines réelles d'une équation, développée en fraction continue d'après la méthode exposée (pages 293 et suiv.) sera donnée par une fraction continue périodique.

On sait que chaque racine réelle sera de la forme

$$x = p + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \text{etc.}$$

$p$ étant la valeur entière approchée de la racine réelle de la transformée $(N)$, $r, s, t$, etc., les valeurs entières approchées des transformées successives $(P)$, $(Q)$, etc. Or pour que cette fraction soit périodique, il faut qu'à partir d'un certain terme les mêmes dénominateurs reviennent dans le même ordre à l'infini, ou qu'il y ait deux termes à partir desquels la fraction continue soit la même. Donc pour que la fraction soit périodique, il faut que parmi les transformées il s'en trouve deux qui aient les mêmes racines ; ainsi, quand on verra dans une fraction continue reparoître un des nombres, déjà trouvé, il n'y aura qu'à examiner si les racines des équations qui ont ce nombre pour valeur entière approchée sont les mêmes, c'est-à-dire, si ces deux équations ont une racine commune ; ce qu'on reconnoîtra aisément en cherchant le commun diviseur des premiers membres, lequel doit nécessairement renfermer toutes les racines communes aux deux équations, s'il y en a. Or comme nous avons vu que toute fraction périodique se réduit à la racine d'une équation du second dégré, il s'ensuit que le commun diviseur sera nécessairement du second dégré : on pourra donc, lorsque cette condition sera satisfaite, prolonger la fraction connue aussi loin qu'on voudra en répétant seulement les mêmes nombres sans être obligé de calculer de nouvelles transformées.

## *Définition des fonctions symétriques ou invariables, et évaluation des sommes des puissances entières positives ou négatives des racines en coefficiens de l'équation.*

On appelle fonction invariable ou symétrique des racines d'une équation toute combinaison de ces racines dont la valeur numérique reste la même en faisant entre ces racines tous les échanges possibles. La somme des racines, celle de leurs produits différens 2 à 2, 3 à 3, etc., sont de telles fonctions ; les sommes des mêmes puissances positives ou négatives de toutes les racines d'une équation sont aussi

des fonctions invariables que nous nous proposerons d'abord d'exprimer en coefficiens de l'équation.

Soit, à cet effet, l'équation

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} \ldots - Tx + V = 0 \ldots (M)$$

$a$, $b$, $c$, $d$, etc. étant les racines : on aura l'identité

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots - Tx + V$$

$$= (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \text{ etc.} \ldots\ldots (N)$$

Cette équation ayant lieu, quelque soit $x$, aura encore lieu en écrivant $x+i$ pour $x$, $x$ et $i$ étant quelconques ; en sorte que

$$(x+i)^m - A(x+i)^{m-1} + \ldots\ldots - T(x+i) + V$$

$$= [(x-a)+i][(x-b)+i][(x-c)+i][(x-d)+i] \text{ etc.}$$

On aura donc entre les coefficiens de la première puissance de $i$ l'identité

$$mx^{m-1} - A(m-1)x^{m-2} + B(m-2)x^{m-3} + \text{etc.} \ldots - T$$

$$= (x-b)(x-c)(x-d) \text{ etc.}$$

$$+ (x-a)(x-c)(x-d) \text{ etc.} \ldots\ldots (P)$$

$$+ (x-a)(x-b)(x-d) \text{ etc.}$$

etc.

dont le second membre est la somme des quotients qu'on obtiendroit en divisant le produit de tous les facteurs de la proposée successivement par chacun de ces facteurs. Divisant $(P)$ par $(N)$, il viendra

$$\frac{mx^{m-1} - A(m-1)x^{m-2} + B(m-2)x^{m-3} \ldots\ldots - T}{x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots\ldots - Tx + V}$$

$$= \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} + \frac{1}{x-d} + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots (Q)$$

équation qui aura lieu pour toute valeur de $x$. Mais

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{x-b} = \frac{1}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{b^2}{x^3} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{x-c} = \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{c^2}{x^3} + \text{etc.}$$

etc. etc.

Posant donc, pour abréger,

$$a + b + c + d + \text{etc.} = S_1$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{etc.} = S_2$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \text{etc.} = S_3$$

etc.

$$a^m + b^m + c^m + d^m + \text{etc.} = S_m$$

$S_1, S_2, S_3 \ldots S_m$ étant des fonctions à évaluer, l'identité $Q$ deviendra

$$\frac{mx^{m-1} - A(m-1)x^{m-2} + B(m-2)x^{m-3} \ldots - T}{x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} \ldots - Tx + V}$$

$$= \frac{m}{x} + \frac{S_1}{x^2} + \frac{S_2}{x^3} + \frac{S^3}{x^4} + \ldots \frac{S_m}{x^{m+1}} + \frac{S_{m+1}}{x^{m+2}} + \text{etc.} (R)$$

Multipliant les deux membres de $(R)$ par le dénominateur du premier, il viendra

$$mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} - \text{etc.}$$

$$= mx^{m-1} \left\{ \begin{array}{l} -mA \\ +S_1 \end{array} \right\} x^{m-2} \left\{ \begin{array}{l} +mB \\ -AS_1 \\ +S_2 \end{array} \right\} x^{m-3} \left\{ \begin{array}{l} -mC \\ +BS_1 \\ -AS_2 \\ +S_3 \end{array} \right\} x^{m-4} + \text{etc.}$$

Comparant les coefficiens des puissances semblables de $x$, on aura les équations

$$m = m$$
$$S_1 - mA = -(m-1)A$$
$$S_2 - AS_1 + mB = (m-2)B$$
$$S_3 - AS_2 + BS_1 - mC = -(m-3)C$$
etc.

d'où

$$S_1 - A = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$S_2 - AS_1 + 2B = 0. \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$
$$S_3 - AS_2 + BS_1 - 3C = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$
$$S_4 - AS_3 + BS_2 - CS_1 + 4D = 0 \quad \ldots (4)$$
etc.

résultats dont la loi est facile à saisir.

On remarquera qu'en multipliant le second membre de $(R)$ par $x^m$, le terme $\frac{S_m}{x^{m+1}}$ donne pour résultat $S_m x^{-1}$, et que multipliant par $V$ le terme $\frac{m}{x}$, il vient $mVx^{-1}$, en sorte que le coefficient total de $x^{-1}$ est

$$S_m - AS_{m-1} + BS_{m-2} \ldots\ldots + mV = 0 \ldots\ldots (S)$$

parce que le terme de même exposant de $x$ dans le premier membre est $0 \times V = 0$. En multipliant le terme $\frac{S_{m+1}}{x^{m+2}}$ par $x^m$, dans $(R)$, on a $S_{m+1} x^{-1}$; d'autre part, le produit de $\frac{S_1}{x^2}$ par $V$ est $S_1 V x^{-1}$; d'où on conclut pour le coefficient total de $x^{-1}$

$$S_{m+1} - AS_m + BS_{m-1} \ldots\ldots + VS_1 = 0 \ldots\ldots (T)$$

parce que le coefficient de $x^{-1}$ dans le premier membre de $(R)$ est nul.

Des formules $(S)$ et $(T)$, on conclut que les sommes des puissances successives des racines forment, à partir de la $m^{eme}$ inclusivement, une série récurrente dont l'échelle de relation est (pag. 246).

$$A - B + C - D \ldots\ldots \text{etc.}$$

L'équation du troisième degré

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

comparée avec la proposée donne

$$A = 0, \; B = -2, \; C = +5, \; D = 0, \text{ etc.}$$

reportant ces valeurs dans les formules (1), (2), (3), etc., on en déduit les sommes des puissances successives des racines

$$S_1 = 0,\ S_2 = 4,\ S_3 = 15,\ S_4 = 8,\ S_5 = 50,\ S_6 = 91$$

L'équation du quatrième degré

$$x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0$$

donne

$$A = 1,\ B = -19,\ C = -49,\ D = -30$$

et substitutions faites dans les formules (1), (2), (3), etc., on trouve

$$S_1 = 1,\ S_2 = 39,\ S_3 = -89,\ S_4 = 723$$

En supposant $x = \frac{1}{y}$ dans l'équation ($M$), les racines de la transformée seront $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, etc. Ainsi calculant, au moyen des formules (1), (2), (3) ..... ($S$), ($T$), etc., les sommes $S_1$, $S_2$, $S_3$, etc. pour la transformée, on auroit les sommes des puissances négatives de la proposée.

On pourra calculer directement des formules analogues aux précédentes pour les puissances négatives : à cet effet, on développera les fractions $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{x-b}$, $\frac{1}{x-c}$, etc., suivant les puissances positives de $x$; ce qui donnera l'identité

$$\frac{mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} - \text{etc.} - T}{x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \ldots - Tx + V}$$

$$= -\left(\tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{b} + \tfrac{1}{c} + \text{etc.}\right) - \left(\tfrac{1}{a^2} + \tfrac{1}{b^2} + \text{etc.}\right)x - \text{etc}$$

$$= -{}_1S - {}_2Sx - {}_3Sx^2 - \text{etc.}$$

en désignant par ${}_1S$, ${}_2S$, ${}_3S$, etc. les sommes des premières, secondes, etc. puissances négatives de la proposée. Les deux termes de la fraction qui forme le premier membre de l'identité qui précède étant écrits dans un ordre inverse, donneront

$$\frac{-T + 2Sx - 3Rx^2 - 4Qx^3 - \text{etc}}{V - Tx + Sx^2 - Rx^3 + \text{etc}} = -S_1 - {}_2Sx - {}_3Sx^2 = \text{etc}\ (R')$$

en sorte que multipliant les deux membres de ($R'$) par le dénominateur, et comparant ensuite les coefficiens des puissances semblables de $x$, on aura les formules des puissances réciproques des racines.

*Evaluation*

*Evaluation des coefficiens de l'équation aux carrés des différences des racines en fonctions des coefficien de l'équation donnée.*

La recherche de l'équation qui donne les carrés des différences entre les racines d'une équation, prise deux à deux, devient très-laborieuse, quand on emploie l'élimination indiquée (pag. 285). Cette équation étant d'un usage fréquent dans la résolution des équations numériques, il sera bon d'avoir des formules au moyen desquelles on puisse exprimer ses coefficiens par ceux de la proposée.

Soit, à cet effet, l'équation

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \ldots + V = 0$$

$a$, $b$, $c$, etc. ses racines, $A'$, $B'$, $C'$, etc. les coefficiens de l'équation aux carrés des différences; il s'agit donc d'évaluer $A'$, $B'$, $C'$, etc. en $A$, $B$, $C$, etc. On est parvenu précédemment aux équations

$$(1)\ldots\ldots S_1 - A = 0$$
$$(2)\ldots\ldots S_2 - AS_1 + 2B = 0$$
$$(3)\ldots\ldots S_3 - AS_2 + BS_1 - 3C = 0$$
$$\text{etc.}$$

qui donnent les sommes des puissances des racines au moyen des coefficiens, et réciproquement: en sorte que la question se réduit à évaluer en $A$, $B$, $C$, etc. les sommes des puissances des racines de l'équation aux carrés des différences; car alors remplaçant dans ces formules $S_1$, $S_2$, $S_3$ etc. par ces expressions, les valeurs de $A$, $B$, $C$ etc. qu'on en déduira, seront celles des coefficiens $A'$, $B'$, $C'$ etc.

Considérons cette suite de binomes

$$(x-a)^s + (x-b)^s + (x-c)^s + (x-d)^s + \text{etc.}$$

lesquels développés suivant les puissances de $x$ donnent

$$mx^s - s(a+b+c+d+\text{etc})\,x^{s-1}$$
$$+ s.\frac{s-1}{2}(a^2+b^2+c^2+\text{etc.})\,x^{s-2}$$
$$- s.\frac{s-1}{2}\cdot\frac{s-2}{3}(a^3+b^3+c^3+\text{etc.})\,x^{s-3} + \text{etc.}$$
$$= mx^s - sS_1x^{s-1} + s.\frac{s-1}{2}S_2x^{s-2}$$
$$- s.\frac{s-1}{2}\cdot\frac{s-2}{3}S_3x^{s-3} + \text{etc.}$$

$S_1, S_2, S_3$, ect. ayant les mêmes acceptions que ci-dessus. Si dans cette identité on fait successivement $x = a$, $x = b$, $x = c$, etc., et qu'on ajoute tous les résultats, le premier membre représentera la somme des puissances du degré $s$ des différences entre les racines de la proposée, en sorte que

$$(a-b)^s + (a-c)^s + \text{etc.} + (b-a)^s + (b-c)^s + \text{etc.}$$
$$+ (c-a)^s + (c-b)^s + \text{etc.} + \text{etc.}$$
$$= m(a^s + b^s + c^s + \text{etc.}) - sS_1(a^{s-1} + b^{s-1} + c^{s-1} + \text{etc.})$$
$$+ s.\frac{s-1}{2} S_2 (a^{s-2} + b^{s-2} + \text{etc.}) - \text{etc.}$$
$$= mS_s - s S_1 S_{s-1} + s.\frac{s-1}{2} S_2 S_{s-2} - \text{etc.} \ldots\ldots - S_s S_0$$

Dans l'hypothèse de $s$ nombre impair, le premier membre se réduira à zéro par la destruction mutuelle de tous les termes, puisque, dans ce cas, les puissances conservent les signes des racines qui sont égales deux à deux, et de signes contraires ; le second membre devient nul de lui-même, en observant que le dernier terme $-S_s S_0$, ou $-m S_s$ détruit le premier, que l'avant-dernier détruit le second, et ainsi de suite ; en sorte que cette analyse ne fournit aucune conclusion dans ce cas. Mais lorsque $s$ est un nombre pair $= 2\mu$, l'identité précédente donne, en désignant son premier membre par $2\sigma_\mu$,

$$2\sigma_\mu = mS_{2\mu} - 2\mu S_1 S_{2\mu-1}$$
$$+ 2\mu.\frac{2\mu-1}{2} S_2 S_{2\mu-2} - 2\mu.\frac{2\mu-1}{2}.\frac{2\mu-2}{3} S_3 S_{2\mu-3} + \text{etc.}$$

Comme les termes du second membre sont les mêmes à égales distances du terme du milieu qui contient $S_\mu S_\mu$, en réunissant les termes égaux et divisant par 2, on aura cette formule générale

$$\sigma_\mu = mS_{2\mu} - 2\mu S_1 S_{2\mu-1}$$
$$+ 2\mu \frac{2\mu-1}{2} S_2 S_{2\mu-2} - 2\mu.\frac{2\mu-1}{2}.\frac{2\mu-2}{3} S_3 . S_{2\mu-3} +$$
$$\ldots\ldots \pm \frac{P(S_\mu)^2}{2}$$

Pour avoir le coefficient $P$ de ce terme du milieu, on fera $m = 2\mu$ et $n = \mu$ dans la formule (page 235)

$$m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.\ldots.\frac{m-(n-1)}{n}$$

qui donne

$$P=2\mu.\frac{2\mu-1}{2}.\frac{2\mu-2}{3}.\frac{2\mu-3}{4}.\ldots.\frac{\mu+1}{\mu}$$

en sorte que

$$\sigma_\mu = mS_{2\mu} - 2\mu S_1 S_{2\mu-1}$$
$$+2\mu.\frac{2\mu-1}{2}S_2.S_{2\mu-2} - 2\mu.\frac{2\mu-1}{2}.\frac{2\mu-2}{3}S_3 S_{2\mu-3} +$$
$$+\ldots.\pm 2\mu\frac{2\mu-1}{2}.\frac{2\mu-2}{3}.\frac{2\mu-3}{4}.\ldots.\frac{\mu+1}{\mu}\frac{(S_\mu)^2}{2}$$

le signe + correspondant à $\mu$ nombre pair, et le signe − à $\mu$ nombre impair. Faisant dans cette formule $\mu=1$, $\mu=2$, $\mu=3$, etc., on aura en sommes des puissances des racines de la proposée, et conséquemment en coefficiens $A$, $B$, $C$, etc., les sommes des puissances des racines de l'équation aux carrés des différences

$$+(a-b)^2+(a-c)^2+\text{etc.}+(b-c)^2+\text{etc.}=\sigma_1$$
$$+(a-b)^4+(a-c)^4+\text{etc.}+(b-c)^4+\text{etc.}=\sigma_2$$
$$+(a-b)^6+(a-c)^6+\text{etc.}+(b-c)^6+\text{etc.}=\sigma_3$$

Remplaçant dans les formules (1), (2), (3), etc. trouvées (pag. 90) $S_1$, $S_2$, $S_3$, etc. par $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$, etc. qu'on sait évaluer, et changeant $A$, $B$, $C$, etc., en $A'$, $B'$, $C'$ etc., on aura ces formules

$$A'=\sigma_1$$
$$B'=\frac{A'\sigma_1-\sigma_2}{2}$$
$$C'=\frac{B'\sigma_1-A'\sigma_2+\sigma_3}{3}$$
$$D'=\frac{C'\sigma_1-B'\sigma_2+A'\sigma_3-\sigma_4}{4}$$
etc. etc.

Les relations précédentes sont en nombre $\frac{m.m-1}{2}$, parce que l'équation aux carrés des différences est du degré $\frac{m.m-1}{2}$: pour en déduire les coefficiens $A'$, $B'$, $C'$ etc., il faut connoître les sommes $\sigma_1$, $\sigma_2$.....$\sigma_\mu$, ce qui exige qu'on

connoisse aussi $S_1, S_2 \ldots\ldots S_{2\mu}$, ou qu'on ait traité $m.m-1$ équations entre ces dernieres sommes et les coefficiens de la proposée ; cela fait, on aura $\frac{m.m-1}{2}$ quantités $\sigma_1 \ldots\ldots \sigma_\mu$ à évaluer, et enfin $\frac{m.m-1}{2}$ coefficiens $A'$, $B'$, etc. à calculer, ce qui donne en tout $m(m-1)+2\frac{m(m-1)}{2}$ ou $2m(m-1)$ formules à traiter.

Soit, par exemple,

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

l'équation aux carrés des différences sera du même degré et de la forme

$$y^3 - A'y^2 + B'y - C' = 0$$

On a pour la proposée

$$A = 0, \quad B = -2, \quad C = 5$$

d'où

$$S_1 = 0, \quad S_2 = 4, \quad S_3 = 15, \quad S_4 = 8, \quad S_5 = 50, \quad S_6 = 91$$

donc

$$\sigma_1 = 12, \quad \sigma_2 = 72, \quad \sigma_3 = -1497$$

et de là

$$A' = 12, \quad B' = 36, \quad C' = -643$$

en sorte que l'équation cherchée sera

$$y^3 - 12y^2 + 36y + 643 = 0$$

*Toute fonction algébrique, rationnelle et invariable des racines d'une équation peut toujours être exprimée d'une manière rationnelle au moyen des coefficiens de cette équation.*

Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ etc. les racines d'une équation, et supposons que les termes de la fonction proposée soient de la forme $\alpha^n \gamma^p$. Si l'on représente par $T.\ \alpha^n$ la somme des puissances du degré $n$ des racines, et par $T.\ \alpha^p$ celle des puissances du degré $p$, ou, en d'autres termes, si on pose

$$\alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n + \text{etc.} = T.\ \alpha^n$$
$$\alpha^p + \beta^p + \gamma^p + \delta^p + \text{etc.} = T.\ \alpha^p$$

et qu'on multiplie $T.\ \alpha^n$ par $T.\ \alpha^p$, le produit contiendra deux espèces de termes, les uns de la forme $\alpha^n\ \mathcal{C}^p$ que nous désignerons par $T.\ \alpha^n\ \mathcal{C}^p$, les autres tels que $\alpha^{n+p}$ que nous désignerons par $T.\ \alpha^{n+p}$; on aura donc

$$T.\ \alpha^n \times T.\ \alpha^p = T.\ \alpha^n\ \mathcal{C}^p + T.\ \alpha^{n+p}$$

d'où on déduit

$$T.\ \alpha^n\ \mathcal{C}^p = T.\ \alpha^n \times T.\ \alpha^p - T.\ \alpha^{n+p} \ldots\ldots (1)$$

Ainsi la somme des termes de la forme $\alpha^n\ \mathcal{C}^p$ sera donnée au moyen de celle des puissances $n$, $p$ et $n+p$ des racines de la proposée, et conséquemment elle pourra se traduire en coefficiens de la proposée. Si on multiplie les deux membres de la dernière équation ci-dessus par la somme des puissances $q$ des racines ou par $T.\ \alpha^q$, on aura

$$T.\ \alpha^q \times T.\ \alpha^n\ \mathcal{C}^p = T.\ \alpha^n \times T.\ \alpha^p \times T.\ \alpha^q - T.\ \alpha^q \times T.\ \alpha^{n+p}$$

Effectuant la multiplication indiquée dans le premier membre, on trouvera dans le produit trois classes distinctes de termes : l'une comprendra les termes de la forme $\alpha^{n+q}\mathcal{C}^p$; la seconde, ceux-ci $\alpha^{p+q}\ \mathcal{C}^n$, et la troisième, tous les termes tels que $\alpha^n\ \mathcal{C}^p\ \gamma^q$ : si donc on désigne la collection des premiers par $T.\ \alpha^{n+q}\ \mathcal{C}^p$, celle des seconds par $T.\ \alpha^{p+q}\ \mathcal{C}^n$ et enfin la totalité des autres par $T.\ \alpha^n\ \mathcal{C}^p\ \gamma^q$, on aura

$$T.\ \alpha^n\ \mathcal{C}^p\ \gamma^q + T.\ \alpha^{n+q}\ \mathcal{C}^p + T.\ \alpha^{p+q}\ \mathcal{C}^n$$
$$= T.\ \alpha^n \times T.\ \alpha^p \times T.\ \alpha^q - T.\ \alpha^q \times T.\ \alpha^{n+p}$$

d'où on déduit

$$T.\ \alpha^n\ \mathcal{C}^p\ \gamma^q = T.\ \alpha^n \times T.\ \alpha^p \times T.\ \alpha^q - T.\ \alpha^{n+q}\ \mathcal{C}^p$$
$$- T.\ \alpha^{p+q}\ \mathcal{C}^n - T.\ \alpha^q \times T.\ \alpha^{n+p}$$

Or $T.\ \alpha^{n+q}\ \mathcal{C}^p$ et $T.\ \alpha^{p+q}\ \mathcal{C}^n$ étant des fonctions formées du produit de deux lettres, on peut les faire dépendre de sommes des puissances des racines en changeant dans la formule (1) d'abord $n$ en $n+q$, ce qui donne

$$T.\ \alpha^{n+q}\ \mathcal{C}^p = T.\ \alpha^p \times T.\ \alpha^{n+q} - T.\ \alpha^{n+p+q}$$

puis $n$ en $p+q$ et $p$ et $n$, ce qui donne

$$T.\ \alpha^{p+q}\ \mathcal{C}^n = T.\ \alpha^n \times T.\ \alpha^{p+q} - T.\ \alpha^{n+p+q}$$

et substituant dans l'expression de $T.\ \alpha^n\ \mathcal{C}^p\ \gamma^q$, on aura cette égalité

$$T.\alpha^n \mathcal{C}^p \gamma^q = T.\alpha^n \times T.\alpha^p \times T.\alpha^q - T.\alpha^p \times T.\alpha^{n+q} - T.\alpha^n \times T.\alpha^{p+q} - T.\alpha^q \times T.\alpha^{n+p} + 2\,T.\alpha^{n+p+q} \ldots\ldots (2)$$

dans le second membre de laquelle il n'entre plus que des sommes des puissances des racines, traductibles en coefficiens de l'équation donnée. En continuant à opérer de cette manière, on parviendroit à faire dépendre de sommes des puissances des racines une fonction symétrique composée d'une suite de termes tels que $\alpha^n \mathcal{C}^p \gamma^q \delta^r$

Proposons-nous, comme application de ce que nous venons de dire, d'évaluer les coefficiens d'une équation qui auroit pour racines toutes les sommes qu'on peut former avec les racines d'une équation donnée, prises deux à deux.

Soit, pour plus de simplicité, une équation du troisième degré

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0$$

dont les racines soient $\alpha, \mathcal{C}, \gamma$, en sorte que celles de l'équation cherchée seront $\alpha+\mathcal{C}, \alpha+\gamma, \mathcal{C}+\gamma$: si $z$ est l'inconnue de la nouvelle équation, on aura

$$[z-(\alpha+\mathcal{C})]\,[z-(\alpha+\gamma)]\,[z-(\mathcal{C}+\gamma)] = 0$$

Comme les racines $\alpha, \mathcal{C}, \gamma$ entrent de la même manière et le même nombre de fois dans les facteurs, les coefficiens du produit développé resteront les mêmes en faisant entre ces racines tous les échanges possibles; ces coefficiens seront donc des fonctions invariables des racines $\alpha, \mathcal{C}, \gamma$ et pourront conséquemment être déterminés au moyen des coefficiens $P$, $Q$ et $R$ de la proposée. Effectuant les produits indiquées, on trouvera

$$z^3 - 2(\alpha+\mathcal{C}+\gamma)z^2 + (\alpha^2+\mathcal{C}^2+\gamma^2+3\alpha\mathcal{C}+3\alpha\gamma+3\mathcal{C}\gamma)z - (\alpha^2\mathcal{C}+\alpha\mathcal{C}^2+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\mathcal{C}^2\gamma+\mathcal{C}\gamma^2) = 0$$

Or on a

$$\alpha+\mathcal{C}+\gamma = -P$$

$$\alpha^2+\mathcal{C}^2+\gamma^2+3\alpha\mathcal{C}+3\alpha\gamma+3\mathcal{C}\gamma = P^2+Q$$

et faisant $n=2$ et $p=1$ dans la formule (1), on trouve

$$\alpha^2\mathcal{C}+\alpha\mathcal{C}^2+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\mathcal{C}^2\gamma+\mathcal{C}\gamma^2 = T.\alpha^2\mathcal{C} = T.\alpha^2 \times T.\alpha - T.\alpha^3$$

Mais on a (page 315)

$$T.\alpha^2 \text{ ou } S_2 = P^2 - 2Q$$

$$T.\alpha^3 \text{ ou } S_3 = -P^3 + 3PQ - 3R$$

donc l'équation cherchée devient

$$z^3 + 2Pz^2 + (P^2 + Q)z + PQ - 3R = 0$$

On voit, par cet exemple, que *pour trouver l'équation d'où dépend une fonction assignée des racines d'une équation proposée, il faut faire dans cette fonction toutes les permutations possibles entre les racines* $\alpha, \zeta, \gamma$ *etc. et désignant par* $\alpha', \zeta', \gamma'$ *etc. les combinaisons qui en résultent, on égalera à zéro le produit des facteurs* $(z-\alpha')$, $(z-\zeta')$, $(z-\gamma')$, *etc. alors les coefficiens des puissances de z dans l'équation à laquelle on parviendra, étant des fonctions symétriques des quantités* $\alpha', \zeta', \gamma'$ *etc. qui elles-mêmes sont, d'après leur formation, des fonctions symétriques des racines* $\alpha, \zeta, \gamma$ *etc. de la proposée, pourront être traduits sous une forme rationnelle, au moyen des coefficiens de l'équation donnée.*

Les considérations précédentes fournissent un nouveau moyen d'obtenir l'équation aux carrés des différences des racines d'une équation donnée : elles serviront aussi dans la résolution générale des équations, comme on le verra par la suite.

## *Du degré de l'équation finale résultante de l'élimination d'une inconnue entre deux équations et deux inconnues.*

L'équation finale résultante de l'élimination d'une inconnue entre deux équations à deux inconnues peut encore se déduire de la propriété des fonctions invariables des racines.

Soient

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots\ldots + Tx + V = 0 \ldots\ldots (M)$$
$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + \ldots\ldots + T'x + V' = 0 \ldots\ldots (N)$$

les deux équations proposées dans lesquelles les coefficiens $P, Q \ldots T, V, P', Q' \ldots T'$ et $V'$ sont des fonctions de $y$ seulement. Concevons qu'on ait résolu l'équation $(M)$ par rapport à $x$ et qu'on ait trouvé les racines $x = \alpha$, $x = \zeta$, $x = \gamma$ etc. $\alpha, \zeta, \gamma$, etc. étant des fonctions de l'autre inconnue $y$, il est clair qu'en faisant $x = \alpha$ dans $(M)$, cette équation sera satisfaite, quelque valeur qu'on suppose à $y$; mais les mêmes racines doivent convenir en même tems à l'équation $(N)$, condition qui limite le nombre des valeurs $y$, on doit donc avoir

$$\alpha^n + P'\alpha^{n-1} + Q'\alpha^{n-2} + \ldots\ldots + T'\alpha + V' = 0 \ldots\ldots (1)$$

équation qui ne renferme plus que $y$ et dont les racines combinées avec $x = \alpha$ satisferont à la fois aux équations $(M)$ et $(N)$; donc l'équation finale en $y$ doit avoir parmi ses racines toutes celles de l'équation (1). On prouverait de la même manière que les racines des équations

$$\zeta^n + P'\zeta^{n-1} + Q'\zeta^{n-2} + \ldots\ldots + T'\zeta + V' = 0 \ldots\ldots (2)$$
$$\gamma^n + P'\gamma^{n-1} + Q'\gamma^{n-2} + \ldots\ldots + T'\gamma + V' = 0 \ldots\ldots (3)$$

combinés avec les valeurs $x = \zeta$, $x = \gamma$, etc. doivent satisfaire aux équations $(M)$ et $(N)$ et que les valeurs de $y$, déduites de (2) et (3) sont des racines de l'équation finale : on obtiendrait donc celle-ci, si les fonctions $\alpha$, $\zeta$, $\gamma$ etc. de $y$ étaient connues, en multipliant entre elles les équations (1), (2), (3) etc. et égalant le produit à zéro; mais, dans ce produit, toutes les racines $\alpha$, $\zeta$, $\gamma$ etc. seront combinées de la même manière, elles pourront donc être évaluées en coefficiens $P, Q, \ldots . T, V$ de l'équation proposée, d'après l'analyse exposée précédemment, et le résultat sera l'équation finale $y$. Examinons maintenant à quel degré, au plus, peut s'élever cette équation : dans le produit des équations (1), (2), (3) etc. le résultat de la multiplication des termes de la première ligne verticale sera

$$(\alpha\,\zeta\,\gamma \text{ etc.})^n = V^n$$

mais le plus haut exposant de $y$ dans $V$ ne peut surpasser $m$, en sorte que $V^n$ ne peut renfermer $y$ avec un exposant plus élevé que $mn$: passons au produit des seconds termes

$$P'^m (\alpha\beta\gamma \text{ etc.})^{n-1} = P'^m V^{n-1}$$

$P'$ étant de la forme $a + by$, $P'^m$ contient au plus $y^m$, d'une autre part $V^{n-1}$ ne peut être que de la dimension $mn - m$ en $y$, en sorte que $P'^m V^{n-1}$ renfermera, au plus, $y^{mn}$. On prouverait de la même manière que dans le produit des troisièmes termes, ou dans

$$Q'^m (\alpha\,\zeta\,\gamma \text{ etc.})^{n-2} = Q'^m V^{n-2}$$

l'inconnue $y$ ne peut être affectée d'un exposant plus élevé que $mn$ et ainsi des produits des autres termes verticalement placés. Reste donc maintenant à démontrer qu'en prenant un terme quelconque dans chacune des équations (1), (2), (3) etc. le produit ne peut contenir $y$ avec un exposant plus élevé que $mn$. Soient $r$ l'exposant de $\alpha$ dans le terme arbitraire pris dans l'équation (1) et $k$ le coefficient, $r'$ l'exposant de $\zeta$ dans un des termes de (2) et $k'$ le coefficient, $r''$ celui de $\gamma$

dans un terme quelconque de (3) et $k''$ son coefficient et ainsi de suite, en sorte qu'on ait le produit $k\alpha^r \times k'\beta^{r'} \times k''\gamma^{r''}+$ etc. On observera dabord que chacune des sommes faites de $r$ et de l'exposant de $y$ dans $k$, de $r'$ et de l'exposant de $y$ dans $k'$, de $r''$ et de l'exposant de $y$ dans $k''$, et ainsi de suite, ne peut excéder $n$, d'où il est aisé de conclure, en observant d'ailleurs que les équations (1), (2), (3), etc. sont en nombre $m$, que l'exposant de $y$ dans le produit des coefficiens $k$, $k'$, $k''$ etc. plus le nombre $r+r'+r''+$ etc. forment une somme qui ne peut surpasser $m\,n$. La proposition sera donc établie si on démontre que la somme des termes de la forme $\alpha^r\ \beta^{r'}\ \gamma^{r''}$ etc., qui, dans le produit des équations (1), (2), (3), etc. ont le même coefficient $k.k'.k''$ etc., ne contient $y$ qu'à la dimension $r+r'+r''$ etc. En faisant usage du théorême sur les fonctions invariables, démontré dans le titre précédent, la question se réduira, en dernière analyse, à prouver que $T.\alpha^{n+r'+r''}$ etc qui entre dans l'expression de $T.\alpha^r\ \beta^{r'}\ \gamma^{r''}$ etc. est de dimension $r+r'+r''+$ etc. en $y$, ce dont on se convaincra en observant que la somme des puissances $r+r'+r''+$ etc. des racines d'une équation est donnée au moyen de $r+r'+r''+$ etc. coefficiens de cette équation, et qu'ainsi cette somme comprendra un coefficient dans lequel l'inconnue $y$ sera, au plus, élevée à la puissance $r+r'+r''+$ etc.

## *Une équation algébrique de degré quelconque ne peut avoir que des racines réelles ou des racines imaginaires de la forme*

$$a+b\sqrt{-1}$$

*a et b étant des quantités réelles.*

On sait que toute équation de degré impair est divisible par un facteur réel du premier degré. Il suffit donc de prouver que toute équation de degré pair est décomposable en facteurs du second degré de la forme

$$x^2+mx+n$$

$m$ et $n$ étant des quantités réelles.

Nous ferons précéder la démonstration de cette proposition de quelques théorêmes préliminaires.

*Si une équation algébrique a pour racine une quantité de la forme* $a+b\sqrt{-1}$, *elle en aura nécessairement une autre de la forme* $a-b\sqrt{-1}$.

Soit l'équation

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \ldots + Tx - V = 0 \quad (M)$$

$a + b\sqrt{-1}$ étant, par hypothèse, une des racines de cette équation, le premier membre s'évanouira en écrivant $a + b\sqrt{-1}$ pour $x$ dans $(M)$; on aura donc

$$(a + b\sqrt{-1})^m - A(a + b\sqrt{-1})^{m-1}$$

$$+ B(a + b\sqrt{-1})^{m-2} - \text{etc.} \ldots - V = 0 \ldots (N)$$

En effectuant les développemens, le résultat sera composé de deux espèces de termes, les uns réels donnés par le premier terme de chaque binome, et par les puissances paires de $+ b\sqrt{-1}$; les autres imaginaires, provenant des puissances impaires de $+ b\sqrt{-1}$: en sorte que le premier membre de $(N)$ sera de la forme $P + Q\sqrt{-1}$, en représentant par $P$ la somme des termes réels, et par $Q$ la somme des coefficiens aussi réels de $\sqrt{-1}$. On aura donc

$$P + Q\sqrt{-1} = 0 \text{ d'où } P = 0, Q = 0$$

Tout se réduit donc à prouver qu'on aura aussi

$$(a - b\sqrt{-1})^m - A(a - b\sqrt{-1})^{m-1}$$

$$+ B(a - b\sqrt{-1})^{m-2} - \text{etc.} \ldots = 0 \ldots (P)$$

Or ce résultat sera, comme le précédent, composé de termes réels et de termes imaginaires; les puissances paires de $- b\sqrt{-1}$ étant les mêmes que celles de $+ b\sqrt{-1}$ et les premiers termes des binomes étant aussi les mêmes dans $(N)$ et $(P)$, on aura de part et d'autre $P$ pour la somme des termes réels. Les puissances impaires de $- b\sqrt{-1}$ ne différant que par le signe de celles de $+ b\sqrt{-1}$, la somme des termes imaginaires sera donc $- Q\sqrt{-1}$, en sorte que le résultat de la seconde substitution sera

$$P - Q\sqrt{-1}$$

Mais on a trouvé

$$P = 0, Q = 0; \text{ donc } P - Q\sqrt{-1} = 0$$

donc la quantité $a - b\sqrt{-1}$ substituée au lieu de $x$ dans la proposée, réduit aussi le premier membre à zéro.

*Lemme. Toute fonction algébrique de* $a \pm b\sqrt{-1}$ *peut être ramenée à la forme* $P \pm Q\sqrt{-1}$, *P et Q étant des quantités réelles.*

1°. On a

$$a \pm b\sqrt{-1} + a' \pm b'\sqrt{-1} + \text{etc.} = a + a' + \text{etc.} \pm (b + b' + \text{etc.})\sqrt{-1}$$

ou

$$P = a + a' + \text{etc.} \quad Q = b + b' + \text{etc.}$$

$$2°\ldots \quad (a \pm b\sqrt{-1})(a' \pm b'\sqrt{-1}) = (aa' - bb') \pm (a'b + ab')\sqrt{-1}$$

ou

$$P = aa' - bb' \; ; \; Q = a'b + ab'$$

$$3°\ldots \quad \frac{a \pm b\sqrt{-1}}{a' \pm b'\sqrt{-1}} = \frac{(a \pm b\sqrt{-1})(a' \mp b'\sqrt{-1})}{(a' \pm b'\sqrt{-1})(a' \mp b'\sqrt{-1})} = \frac{(aa' + bb') \pm (a'b - ab')\sqrt{-1}}{a'^2 + b'^2}$$

ou

$$P = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} \; ; \; Q = \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}$$

Les calculs faits pour démontrer le premier théorème de ce titre, prouvent que la fonction $(a \pm b\sqrt{-1})^m$ est de la forme $P \pm Q\sqrt{-1}$. On peut encore démontrer cette proposition par les simples opérations de l'algèbre élémentaire, lorsque $a \pm b\sqrt{-1}$ est affecté d'un radical pair de la forme $2^m$. Considérons donc la fonction $\sqrt{a \pm b\sqrt{-1}}$, et posons

$$\sqrt{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt{a - b\sqrt{-1}} = u \ldots . (1)$$

élevant au carré, il vient

$$2a + 2\sqrt{a^2 + b^2} = u^2$$

quantité nécessairement positive, donc $u$ sera une quantité réelle : élevant ensuite au carré la différence

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}-\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=t\ldots.(2)$$

ce qui donne

$$2a-2\sqrt{a^2+b^2}=t^2$$

$t^2$ sera une quantité essentiellement négative : donc on pourra poser

$$t^2=-V^2\text{ ; d'où }t=\pm V\sqrt{-1}$$

$V$ étant une quantité réelle : ajoutant les résultats (1) et (2), il viendra

$$2\sqrt{a+b\sqrt{-1}}=u\pm V\sqrt{-1}$$

et retranchant (2) de (1), on aura

$$2\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=u\mp V\sqrt{-1}$$

d'où on conclut

$$\sqrt{a\pm b\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}(u\pm V\sqrt{-1})=P\pm Q\sqrt{-1}$$

Considérons encore la quantité

$$\sqrt[4]{a+b\sqrt{-1}}+\sqrt[4]{a-b\sqrt{-1}}=z\ldots.(3)$$

on aura par l'élevation au carré,

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}+2\sqrt{a^2+b^2}$$
$$+\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=u+2\sqrt[4]{a^2+b^2}=z^2$$

quantité essentiellement positive, donc $z$ sera une quantité réelle. Si on élève au carré les deux membres de

$$\sqrt[4]{a+b\sqrt{-1}}-\sqrt[4]{a-b\sqrt{-1}}=v\ldots.(4)$$

on aura

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}-2\sqrt[4]{a^2+b^2}$$

$$+\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=u-2\sqrt[4]{a^2+b^2}=v^2$$

quantité essentiellement négative, car on a fait

$$u=\sqrt{a+b\sqrt{-1}}+\sqrt{a-b\sqrt{-1}}$$

en sorte que

$$u^2=2a+2\sqrt{a^2+b^2}<4\sqrt{a^2+b^2}$$

donc $$u<2\sqrt[4]{a^2+b^2}$$

Soit donc

$$v^2=-X^2, \text{ d'où } v=\pm X\sqrt{-1}$$

$X$ étant une quantité réelle : combinant les équations (3) et (4) par addition et par soustraction, il viendra

$$\sqrt[4]{a\pm b\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}(z\pm X\sqrt{-1})=P\pm Q\sqrt{-1}$$

où $P$ et $Q$ sont des quantités réelles.

Nous passerons maintenant à la démonstration du théorème annoncé. Soit, à cet effet, l'équation

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+Tx+V=0$$

$m$ étant de la forme $2\mu$, $\mu$ étant un nombre impair, et conséquemment $m$ un nombre pair une fois seulement divisible par 2. Quoique les racines de cette équation ne soient pas connues, on pourra néanmoins exprimer au moyen des coefficiens $A$, $B$....$T$ et $V$ ceux d'une autre équation qui aurait pour racines toutes les sommes différentes des racines $a$, $b$, $c$ etc, prises deux à deux. Une équation ainsi formée sera du degré $m.\frac{m-1}{2}$, nombre impair, puisque, par hypothèse, $m$ est une seule fois divisible par 2, donc elle aura au moins une racine réelle; mais l'équation qui aurait pour racines tous les produits différens des racines de la proposée, multipliées deux à deux, serait aussi du degré $\frac{m.m-1}{2}$; donc il existe deux racines de la proposée, dont la somme est réelle, et deux dont le produit est aussi réel. Mais pour que la proposée soit

divisible par un facteur réel tel que

$$x^2 + mx + n$$

il faut de plus que les deux racines qui donnent une somme réelle donnent aussi un produit réel. Pour prouver que la proposée aura deux racines qui satisferont à cette condition, considérons l'équation dont les racines soient une fonction de celles de la proposée, telles que $a+b+kab$, le coefficient $k$ étant quelconque : cette équation sera encore du degré $m\frac{m-1}{2}$, elle aura donc au moins une racine réelle, et comme on peut assigner à $k$ une infinité de valeurs différentes, on pourra donc former une infinité de ces équations dont chacune aura, au moins, une racine réelle; et si, par exemple, la proposée est du sixième degré, on ne pourra nier que quinze fois de suite que la racine réelle qu'on trouve ne soit la même, à la différence du nombre $k$, que l'une des racines réelles déjà trouvées : conséquemment il existera deux racines réelles telles que

$$a+b+kab$$
$$a+b+k'ab$$

qui se composeront des mêmes lettres, en sorte qu'on aura

$$a+b+kab=\alpha$$
$$a+b+k'ab=\zeta$$

$\alpha$ et $\zeta$ étant des quantités réelles : on deduit de là

$$ab=\frac{\alpha-\zeta}{k-k'}; \quad a+b=\frac{k'\alpha-k\zeta}{k'-k}$$

*Donc l'équation du dégré* $2\mu$, $\mu$ *étant un nombre impair quelconque, admet un facteur réel du second degré.*

Si la proposée est du degré $4\mu$, $\mu$ étant un nombre impair quelconque, l'équation d'où dépendra la fonction des racines $a+b+kab$, sera du degré $2\nu$, $\nu$ étant aussi un nombre impair; cette équation aura, d'après ce qui vient d'être démontré, un facteur réel de la forme.

$$u^2+mu+n$$

qui par sa résolution donnera l'une des combinaisons

$$a+b+kab,\ a+c+kac, \text{ etc.}$$

Donc parmi toutes ces combinaisons, il y en aura une de la

forme $A + B\sqrt{-1}$, et donnant à $k$ une infinité de valeurs successives, chacune des équations résultantes admettra un facteur réel du second degré qui donnera une racine de la même forme : on retrouvera donc nécessairement deux combinaisons entre les mêmes lettres

$$a + b + kab = A + B\sqrt{-1}$$
$$a + b + k'ab = A' + B'\sqrt{-1}$$

d'où on déduit

$$a + b = M + N\sqrt{-1}\,;\quad ab = M' + N'\sqrt{-1}$$

donc la proposée aura un facteur du second degré de la forme

$$x^2 - (M + N\sqrt{-1})\,x + M' + N'\sqrt{-1}$$

d'où

$$x = \frac{M+N\sqrt{-1}}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{M+N\sqrt{-1}}{2}\right]^2 - (M' + N'\sqrt{-1})}$$

réductible à la forme

$$x = P + Q\sqrt{-1}$$

mais une racine de cette forme a toujours, d'après ce qui a été démontré précédemment, une conjuguée telle que

$$x = P - Q\sqrt{-1}$$

et le produit des facteurs correspondans est $x^2 + mx + n$, $m$ et $n$ étant des quantités réelles. *Donc une équation du degré $4\mu$, $\mu$ étant impair, admet un facteur réel du second degré*

On étendrait facilement cette analyse à une équation d'un degré trois, quatre, etc. fois divisible par 2, et on conclurait

1°. *Qu'une équation de degré pair est décomposable en facteurs réels du second degré.*

2°. *Qu'une équation ne peut avoir que des racines réelles ou des racines imaginaires de même forme que celles du second degré.*

On peut conclure de la proposition précédente *que toute fonction algébrique de $a + b\sqrt{-1}$ est de même forme* : car égalant la fonction qu'on considère à une inconnue, et faisant disparaître les radicaux qu'elle contient par l'élévation aux

puissances successives, on aura pour déterminer l'inconnue une équation de degré pair dont les racines imaginaires seront de la forme $P \pm Q\sqrt{-1}$.

## *Règle des signes.*

*Une équation de degré quelconque ne peut avoir plus de racines positives que de variations de signes, ni plus de racines négatives que de permanences ou de répétitions suivies du même signe.*

La proposition sera prouvée, si l'on fait voir que la multiplication du premier membre par un facteur $x + a$ correspondant à une racine négative, n'introduit pas dans le produit une variation de plus, et que la multiplication par le facteur $x - a$ ne donne pas une permanence de plus, parce que le produit contenant un terme de plus que le multiplicande, il s'y trouvera, dans le premier cas, au moins une permanence de plus, et dans le second au moins une variation de plus.

Soit l'équation proposée

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Tx + V = 0$$

le produit par $x + a$ sera

$$\left.\begin{array}{l} x^{m+1} + Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Tx^2 + Vx \\ + ax^m + Aax^{m-1} + \ldots + aSx^2 + aTx + aV \end{array}\right\} = 0$$

Le coefficient de chaque terme du produit est égal à celui du terme de même rang dans la proposée, augmenté du coefficient du terme précédent, multiplié par $a$. D'après cette génération, on voit que, pour obtenir les signes du produit, il suffit d'écrire la suite des signes du multiplicande, et au-dessous la même suite, en ne commençant qu'à la seconde place.

Soit donc

$$+ + + - + - - + - + - - + + +$$

la suite des signes du multiplicande; ceux du produit seront, pour le facteur $x + a$,

$$\begin{array}{l} + + + - + - - + - + - - + + + \\ \quad + + + - + - - + - + - - + + + \\ \hline + + + \; i \; i \; i \; \bullet \; i \; i \; i \; i - i + + + \end{array}$$

où

où la lettre $i$ indique l'indétermination du signe du résultat, lorsqu'on fait abstraction de toute valeur numérique des coefficiens : tant qu'il y aura permanence dans le multiplicande, à partir du premier terme, il y aura aussi permanence dans le produit ; mais lorsque la permanence cessera au multiplicande, le signe correspondant du produit deviendra indéterminé, et l'indétermination continuera jusqu'à ce que la permanence se rétablisse dans le multiplicande, auquel cas le signe du produit deviendra déterminé et ainsi de suite. Le nombre des signes indéterminés du produit sera donc le même que celui des variations de signes du multiplicande : il suffit donc de faire voir que les signes indéterminés ne peuvent, dans aucun cas, introduire au produit plus de variations qu'il ne s'en trouve au multiplicande. Un seul signe indéterminé ne peut être compris qu'entre des signes dissemblables $+$ et $-$ ou $-$ et $+$ : si pour cette indétermination on prend le signe $+$, il y aura, dans le premier cas, permanence de $+$ à $+$ et variation de $+$ à $-$ ; si on remplace le signe indéterminé par $-$, il y aura variation de $+$ à $-$ et permanence de $-$ à $-$ ; il en sera de même en supposant $+$ ou $-$ entre les deux signes $-$ et $+$ ; ainsi un signe indéterminé compris entre deux signes déterminés ne peut donner qu'une variation. Un nombre impair de signes indéterminés consécutifs se trouve compris entre deux signes dissemblables, et un nombre pair de ces signes successifs est intercepté entre deux signes semblables ; dans l'un et l'autre cas, le plus grand nombre de variations qu'on pourrait introduire en supposant des signes au lieu de ces indéterminations serait, au plus, égal au nombre des variations correspondantes dans le multiplicande. Donc, comme il y a au produit un signe de plus qu'au multiplicande, on doit conclure que le facteur $x + a$ a introduit, au moins, une permanence, et qu'ainsi le nombre des racines négatives ne peut être plus grand que celui des permanences.

On prouverait par un raisonnement semblable, qu'en multipliant par un facteur $x - a$, le produit ne peut contenir au de-là du nombre des permanences qui se trouvent au multiplicande, et comme il se trouve dans ce produit un signe de plus que dans l'équation, il s'y sera donc introduit, au moins, une variation de plus.

Il suit du théorème précédent, que lorsque toutes les racines de la proposée sont réelles, le nombre des racines positives est précisément le même que celui des variations, et que les racines négatives sont en même nombre que les permanences.

En effet, soient $m$ le nombre des racines positives, $n$ celui des racines négatives, $m'$ le nombre des variations, $n'$ celui des permanences: puisque, par hypothèse, toutes les racines sont réelles, on aura

$$m' + n' = m + n$$

en observant que le nombre tant des permanences que des variations est égal au degré de l'équation: or on ne peut avoir $m > m'$, donc le nombre $n$ ne peut être $< n'$; on sait d'ailleurs que $n$ ne peut être $> n'$, donc

$$n = n' \text{ et } m = m'$$

Lorsqu'il manque un des termes dans la proposée, on peut assez souvent reconnaître la présence des racines imaginaires par la règle ci-dessus. En effet si on restitue le terme qui manque en lui donnant successivement $+ o$ et $- o$ pour coefficient, le nombre des variations ou des permanences qui résulteront de ces substitutions seront différens ou les mêmes: dans le premier cas, il existera des racines imaginaires; car si on voulait supposer que toutes les racines fussent réelles, on serait conduit par la règle de *Descartes*, à deux conclusions contradictoires sur le nombre des racines positives et négatives. Dans le second cas, toutes les racines peuvent être réelles, mais rien jusqu'ici ne prouve qu'elles le soient.

## *Caractères qui servent à reconnoître si toutes les racines d'une équation sont réelles, et le plus grand nombre de racines imaginaires qu'elle puisse avoir.*

Lorsque toutes les racines d'une équation sont réelles, les différences entre ces racines sont aussi réelles, et leurs carrés essentiellement positifs; ainsi, dans ce cas, l'équation aux carrés des différences a toutes ses racines réelles et positives, et par conséquent ses termes sont alternativement positifs et négatifs. Si cette condition n'a pas lieu, il faut conclure que la proposée a des racines imaginaires. Réciproquement, si l'équation aux carrés des différences n'a que des variations de signes, la proposée n'aura que des racines réelles; car si ces racines n'étoient pas toutes réelles, il y en auroit au moins deux imaginaires que nous désignerons par $\alpha + \zeta\sqrt{-1}$, $\alpha - \zeta\sqrt{-1}$; le quarré de la différence

seroit $-4C^2$ ; donc l'équation aux carrés des différences auroit au moins une racine réelle et négative, et par conséquent au moins une permanence : ce qui est contre la supposition.

Puisque chaque couple de racines imaginaires de l'équation proposée introduit au moins une racine réelle négative dans l'équation aux carrés des différences, et qu'une racine réelle négative introduit au moins une permanence de signes, l'équation proposée ne pourra donc pas avoir un nombre de racines imaginaires plus grand que le double des permanences de signes dans l'équation aux carrés des différences. Ainsi on pourra toujours reconnoître, à l'inspection des signes de cette équation, si toutes les racines de l'équation proposée sont réelles, et le plus grand nombre des racines imaginaires qu'elle peut admettre.

Appliquons ces théorèmes à quelques équations, et soit d'abord celle du second degré

$$x^2 - Ax + B = 0$$

L'équation aux carrés des différences sera du degré $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ et conséquemment de la forme

$$y - A' = 0$$

et on aura

$$A' = A^2 - 4B$$

Or pour que les racines de la proposée soient réelles, il faut que les signes de l'équation aux carrés de différences soient alternatifs, ou qu'on ait

$$A^2 - 4B > 0 \text{ ; d'où } \frac{A^2}{4} - B > 0$$

Elles seront imaginaires dans le cas de

$$A^2 - 4B < 0 \text{ ; d'où } \frac{A^2}{4} - B < 0$$

Pour qu'elles soient égales, il faut qu'on ait

$$A^2 - 4B = 0 \text{ ; d'où } \frac{A^2}{4} - B = 0$$

conclusions qu'on déduit de l'examen des racines de la proposée.

Soit l'équation générale du troisième degré

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

l'équation aux carrés des différences sera du degré $\frac{3 \cdot 2}{2}$

$= 3$, et nous la représenterons par

$$y^3 - A'y^2 + B'y - C' = 0$$

ou (pages 533 et 536)

$$A' = 2(A^2 - 3B)$$
$$B' = (A^2 - 3B)^2$$
$$C' = \frac{4(A^2 - 3B)(B^2 - 3AC) - (9C - AB)^2}{3}$$

Or pour que les racines de la proposée soient toutes réelles, il faut que l'équation aux carrés des différences ne contienne que des variations de signes, ou qu'on ait

$$A^2 - 3B > 0$$
$$4(A^2 - 3B)(B^2 - 3AC) - (9C - AB)^2 > 0.$$

Si l'une de ces conditions manque, la proposée ne pourra pas avoir toutes ses racines réelles, elle en aura donc deux imaginaires. Lorsque le second terme manque dans la proposée, les conditions ci-dessus se réduisent à

$$B < 0$$
$$\frac{B^3}{27} > \frac{C^2}{4}$$

Elles sont les mêmes que celles déduites des formules générales des racines, comme on le verra bientôt.

*Méthode pour déterminer, dans certains cas, le nombre des racines réelles et celui des racines imaginaires.*

Soient $a$, $b$, $c$, etc. les racines réelles d'une équation algébrique, $\alpha \pm 6\sqrt{-1}$, $\gamma \pm \delta'\sqrt{-1}$ etc. les racines imaginaires; les carrés des différences seront,

1°. entre les racines réelles

$$(a-b)^2,\ (a-c)^2,\ (a-d)^2 \text{ etc.}$$
$$(b-c)^2,\ (b-d)^2,\ (c-d)^2 \text{ etc.}$$

2°. entre les racines imaginaires conjuguées

$$-4\,6^2,\ -4\,\delta^2, \text{ etc.}$$

3°. entre les racines réelles et les racines imaginaires

$$[(\alpha - a) + \mathcal{C}\sqrt{-1}]^2, \quad [(\alpha - a) - \mathcal{C}\sqrt{-1}]^2$$
$$[(\alpha - b) + \mathcal{C}\sqrt{-1}]^2, \quad [(\alpha - b) - \mathcal{C}\sqrt{-1}]^2$$
$$[(\alpha - c) + \mathcal{C}\sqrt{-1}]^2, \quad [(\alpha - c) - \mathcal{C}\sqrt{-1}]^2$$
$$[(\alpha - d) + \mathcal{C}\sqrt{-1}]^2, \quad [(\alpha - d) - \mathcal{C}\sqrt{-1}]^2$$
etc. etc.

4°. entre les racines imaginaires non conjuguées

$$[(\alpha-\gamma)+(\mathcal{C}-\delta)\sqrt{-1}]^2, \quad [(\alpha-\gamma)-(\mathcal{C}-\delta)\sqrt{-1}]^2$$
$$[(\alpha-\gamma)+(\mathcal{C}+\delta)\sqrt{-1}]^2, \quad [(\alpha-\gamma)-(\mathcal{C}+\delta)\sqrt{-1}]^2$$
etc. etc.

Soit $m$ le degré de l'équation proposée, celui de l'équation aux carrés des différences des racines, sera $\frac{m.m-1}{2} = n$; soient $p$ le nombre des racines réelles, $2q$ celui des imaginaires, en sorte que

$$m = p + 2q$$

il est facile de voir que parmi les $n$ racines de l'équation aux carrés des différences, il y en aura nécessairement $p.\frac{p-1}{2}$ de réelles et positives, $q$ de réelles et négatives, $2pq$ d'imaginaires de la troisième espèce distinguée ci-dessus, et $2q(q-1)$ d'imaginaires de la quatrième espèce, parce que du nombre $\frac{2q(2q-1)}{2}$ qui exprime celui des différences entre toutes les racines imaginaires, on doit retrancher $q$ différences déjà prises : on aura donc, en total, $2q(p+q-1)$ racines imaginaires.

Qu'on effectue partiellement les produits des facteurs correspondans à chacune des classes de racines ci-dessus, le dernier terme de l'équation aux carrés des différences des racines sera le produit de tous les derniers termes des produits ainsi formés, et il est clair

1°. Que le produit des facteurs dus aux $\frac{p.p-1}{2}$ racines réelles et positives aura son dernier terme positif ou négatif, suivant que le nombre de ces racines sera pair ou impair.

2°. Que celui des facteurs résultans des racines de la seconde classe aura toujours son dernier terme positif, quel que soit le nombre de ces racines.

tion des signes de l'équation aux carrés des différences, si toutes les racines sont réelles; si elles ne le sont pas, l'équation doit donc avoir deux ou quatre racines imaginaires, ensorte que le nombre des racines réelles est $2k-2$ ou $2k-4$; ces nombres sont pairs, et ils diffèrent de deux unités: donc l'un des deux sera compris dans la formule $4\lambda$, et l'autre dans celle-ci $4\lambda+2$; mais le nombre des racines réelles est de l'une de ces formes $4\lambda$ ou $4\lambda+2$, suivant que le dernier terme de l'équation aux carrés des différences est positif ou négatif; on saura donc lequel de ces deux nombres représente celui des racines réelles.

Si l'équation proposée est degré impair $=2k+1$, on reconnoîtra de même si toutes les racines sont réelles, en examinant si les signes de l'équation aux carrés des différences sont alternativement positifs et négatif: si cette condition n'est pas satisfaite, la proposée aura, d'après ce qu'on sait, *à priori*, deux ou quatre racines imaginaires; donc le nombre des racines réelles sera ou $2k-1$ ou $2k-3$; l'un de ces nombres sera de la forme $4\lambda+1$, et l'autre de la forme $4\lambda+3$: le signe du dernier terme de l'équation aux carrés des différences fera connoître alors celle de ces deux formules dans laquelle le nombre des racines réelles de la proposée se trouve compris.

Ainsi, à la seule inspection des signes de l'équation aux carrés des différences, on pourra juger 1°. si toutes les racines de l'équation proposée sont réelles ou non; 2°. si le nombre des racines réelles est un de ceux-ci, 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, etc. compris dans les formules $4\lambda$ et $4\lambda+1$, ou s'il est de la suite 2, 3, 6, 7, 10, 11, etc. donnée par $4\lambda+2$ et $4\lambda+3$, ce qui suffira pour déterminer le nombre des racines réelles et celui des racines imaginaires dans les équations qui ne passent pas le cinquième degré, et dans toutes celles à l'égard desquelles on saura, *à priori*, que le nombre des racines imaginaires ne peut excéder quatre.

## *Recherche des racines imaginaires des équations.*

On a prouvé plus haut que ces racines sont toujours de la forme $\alpha+\epsilon\sqrt{-1}$, $\alpha$ et $\epsilon$ étant des quantités réelles, et on a démontré ensuite que la substitution de $\alpha+\epsilon\sqrt{-1}$ pour $x$, donnoit un résultat de la forme $P+Q\sqrt{-1}$, $P$ et $Q$ étant des quantités réelles, résultat qui ne pouvoit être égal à zéro, à moins qu'on ne posât séparément

$$P=0,\quad Q=0$$

mais

$$P=\alpha^m + P'\alpha^{m-1} + P''\alpha^{m-2} + \text{etc.} = 0 \ldots\ldots (1)$$

$$Q=m\alpha^{m-1} + Q'\alpha^{m-2} + Q''\alpha^{m-3} + \text{etc.} = 0 \ldots\ldots (2)$$

$P'$, $P''$, etc. $Q'$, $Q''$, etc. étant des fonctions connues de $\zeta$ et des coefficiens de la proposée : la question se réduit donc à trouver tous les systêmes de valeurs réelles de $\alpha$ et $\beta$ qui satisfont aux deux équations (1) et (2). On y parviendroit en éliminant $\alpha$ suivant la méthode connue, et cherchant les racines réelles de l'équation en $\zeta$ et les valeurs correspondantes de $\alpha$.

Mais on sait que chaque couple de racines imaginaires conjugées $\alpha+\zeta\sqrt{-1}$, $\alpha-\zeta\sqrt{-1}$, donne nécessairement dans l'équation aux carrés des différences une racine réelle négative $-4\zeta^2$, d'où il suit qu'en changeant dans celle-ci les signes des puissances impaires de l'inconnue, puis cherchant les racines réelles et positives $y'$, $y''$, $y'''$, on aura

$$y'=4\zeta^2\ ;\quad y''=4\delta^2\ ;\ \text{etc.}$$

d'où

$$\zeta=\frac{\sqrt{y'}}{2}\ ;\quad \delta=\frac{\sqrt{y''}}{2}\ ;\ \text{etc.}$$

Les valeurs de $\zeta$ ainsi connues, on opérera sur les équations (1) et (2) comme pour obtenir l'équation finale en $\zeta$; mais avant on parviendra à un reste du premier degré de la forme $A\alpha+B$, $A$ et $B$ étant des fonctions de $\zeta$ : ce reste étant égalé à zéro, fournira une équation

$$A\alpha+B=0$$

qui donnera une valeur correspondante de $\alpha$

Lorsque les parties réelles $\alpha$, $\gamma$, etc. des racines imaginaires seront inégales entre elles et différeront aussi des racines réelles $a$, $b$, $c$, etc. il est évident que l'équation aux carrés des différences n'aura d'autres racines négatives que celles-ci $-4\zeta^2$, $-4\delta^2$, — etc; de sorte que le nombre de ces racines sera précisément le même que celui des couples de racines imaginaires de la proposée, et, dans ce cas, les équations (1) et (2) ne pourront avoir qu'une seule valeur de $\alpha$, correspondante à chacune des valeurs de $\zeta$, et par conséquent le plus grand commun diviseur ne pourra être que du premier degré.

Mais s'il arrive que, parmi les quantités $\alpha$, $\gamma$, etc. il s'en

trouve d'égales entr'elles, et aux racines réelles $a$, $b$, $c$, etc. alors l'équation aux carrés des différences aura nécessairement plus de racines négatives que la proposée n'aura de couples de racines imaginaires. En effet, soit $a = \alpha$, les deux racines imaginaires $[(\alpha - a) + 6\sqrt{-1}]^2$, $[(\alpha - a) - 6\sqrt{-1}]^2$, deviendront $-6^2$, $-6^2$, et par conséquent réelles négatives : de sorte que si la proposée ne contient que les deux imaginaires $\alpha + 6\sqrt{-1}$, $\alpha - 6\sqrt{-1}$, l'équation aux quarrés des différences contiendra, dans le cas de $\alpha = a$, outre la racine réelle négative $-4\,6^2$, ces deux autres $-6^2$, $-6^2$, égales entre elles ; d'où l'on voit que lorsque l'équation aux carrés des différences a trois racines réelles négatives, dont deux sont égales entre elles, alors la proposée peut avoir ou deux racines imaginaires, ou six ; savoir,

$$(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})\,;\ (\gamma \pm \tfrac{6}{2}\sqrt{-1})\,;\ (\delta \pm \tfrac{6}{2}\sqrt{-1})$$

Si la proposée contient quatre racines imaginaires

$$(\alpha \pm 6\sqrt{-1})\,;\ (\gamma \pm \delta\sqrt{-1})$$

alors l'équation aux carrés des différences contiendra les deux racines réelles négatives $-4\,6^2$, $-4\,\delta^2$ ; mais si $a = \alpha$, elle aura encore les deux suivantes $-6^2$, $-6^2$ ; si de plus $b = \gamma$, elle en aura deux autres $-\delta^2$, $-\delta^2$ ; enfin si on avoit $\alpha = \gamma$, alors les quatre racines imaginaires

$$[(\alpha - \gamma) + (6 - \delta)\sqrt{-1}]^2\,;\ [(\alpha - \gamma) - (6 - \delta)\sqrt{-1}]^2$$

$$[(\alpha - \gamma) + (6 + \delta)\sqrt{-1}]^2\,;\ [(\alpha - \gamma) - (6 + \delta)\sqrt{-1}]^2$$

deviendroient

$$-(6 - \delta)^2\,,\ -(6 - \delta)^2\,,\ -(6 + \delta)^2\,,\ -(\beta + \delta)^2$$

c'est-à-dire réelles négatives et égales deux à deux.

D'où il est aisé de conclure

1°. Que lorsque toutes les racines réelles négatives de l'équation aux carrés des différences sont inégales entre elles, alors la proposée a nécessairement autant de couples de racines imaginaires qu'il y a de ces racines.

2°. Que si, parmi les racines réelles négatives de l'équation aux carrés des différences, il s'en trouve d'égales entr'elles, alors chaque racine inégale, s'il y en a, donnera toujours, comme on vient de le voir, deux racines

imaginaires conjuguées ; mais chaque couple de racines négatives égales, telles que $-4\mathcal{C}^2$, $-4\mathcal{C}^2$ qui résultent de $\delta=\beta$, indiquent quatre racines imaginaires $\alpha\pm\mathcal{C}\sqrt{-1}$, $\gamma\pm\mathcal{C}\sqrt{-1}$, tandis que celles-ci $-\mathcal{C}^2$, $-\mathcal{C}^2$, $-(\mathcal{C}-\delta)^2$, $-(\mathcal{C}-\delta)^2$ etc. qui viennent, par exemple, de $\alpha=\alpha$, et de $\alpha=\gamma$ n'en donnent aucune. Trois racines négatives égales fourniront six racines imaginaires, $\alpha\pm\mathcal{C}\sqrt{-1}$, $\gamma\pm\delta\sqrt{-1}$, $\varepsilon\pm\lambda\sqrt{-1}$, si elles sont données par $\mathcal{C}=\delta=\lambda$, ou deux seulement lorsque, par exemple, $\alpha=\gamma$ et $\delta=2\mathcal{C}$ auquel cas on a encore trois racines égales chacune à $-4\mathcal{C}^2$. Quatre racines négatives égales donneront huit ou quatre racines imaginaires, ou elles n'en donneront aucune si, par exemple, les coefficiens $\mathcal{C}$, $\delta$ etc. de $\sqrt{-1}$ étant égaux, on a de plus $a=\alpha$, $b=\gamma$; $\alpha,\gamma$, étant les termes réels dans les racines imaginaires. Or, soient $-y'$, $-y'$ deux racines égales négatives de l'équation aux carrés des différences ; on fera comme ci-dessus

$$\mathcal{C}=\frac{\sqrt{y'}}{2}$$

mais il ne faudra plus substituer cette valeur dans l'équation

$$A\alpha+B=0$$

parce que (page 38) on en déduiroit $\alpha=\frac{0}{0}$, ce qui ne feroit rien connoître ; on fera donc les substitutions dans le reste précédent qui sera du second degré en $\alpha$ ; ce reste étant égalé à zéro, donnera ou deux racines réelles, ou deux racines imaginaires. Dans le premier cas, nommant $\alpha'$ et $\alpha''$ ces deux racines, on aura les quatre racines imaginaires.

$$\alpha'\pm\mathcal{C}\sqrt{-1},\quad \alpha''\pm\mathcal{C}\sqrt{-1}$$

Dans le second cas, les valeurs de $\alpha$ étant imaginaires, contre l'hypothèse, on en conclura que les deux racines $-y'$, $-y'$ ne donneront pas de racines imaginaires dans la proposée. Si l'équation aux carrés des différences comportoit trois racines négatives égales $-y'$, $-y'$, $-y'$, à la valeur

$$\mathcal{C}=\frac{\sqrt{y'}}{2}$$

correspondroient trois valeurs de $\alpha$ ; d'où il suit que si on substituoit la valeur de $\mathcal{C}$ dans le reste du premier ou du

second degré, on auroit deux équations qui se réduiroient à zéro, indépendamment de $\alpha$ ; on fera donc la substitution dans le reste du troisième degré en $\alpha$ ; ce reste égalé à zéro donnera pour $\alpha$ ou trois valeurs réelles, ou une réelle et deux imaginaires : dans le premier cas, on aura six racines imaginaires, deux seulement dans le second, les valeurs imaginaires de $\alpha$ devant toujours être rejetées comme contraires à l'hypothèse.

## *Résolution générale des équations.*

Le but de la résolution générale des équations est de trouver pour toutes les équations d'un même degré les fonctions des coefficiens de ces équations propres à en représenter toutes les racines. Ce problême a été résolu par les premiers algébristes sur les équations des premier, second, troisième et quatrième degrés ; ils parvinrent à transformer l'équation à résoudre en une autre susceptible d'être résolue à la manière d'une équation d'un degré moindre, et à déterminer, au moyen des racines de cette nouvelle équation qu'on a nommée *réduite*, toutes celles de la proposée. La résolution générale des équations se réduit donc à la recherche d'une fonction des racines, qui dépende d'une équation d'un degré moindre, et dont les racines donnent facilement celles de la proposée.

Soit d'abord l'équation du second degré

$$x^2 + px + q = o$$

et nommons $a$ et $b$ ses deux racines ; on a d'abord

$$a + b = -p \ldots . (1)$$

Il ne s'agit donc plus que d'avoir la valeur d'une autre fonction des racines, qui, combinée avec la précédente, détermine chacune d'elles au moyen d'équations du premier degré seulement : cette fonction sera donc de la forme

$$Aa + Bb$$

$A$ et $B$ étant des coefficiens indépendans des racines $a$ et $b$. La fonction $Aa + Bb$ est susceptible de deux combinaisons dont la seconde s'obtient en changeant dans la première $a$ en $b$, et réciproquement ; elle dépend donc d'une équation du second degré, excepté le cas où

$$A = B$$

mais alors on retombe sur la somme des racines, qui est déjà connue. Puisqu'on est conduit par la détermination de la fonc-

tion $Aa + Bb$ à une équation du second degré, il faut que cette équation puisse se résoudre par une simple extraction de la racine carrée ; mais alors les deux racines deviennent égales et de signes contraires : il faut donc déterminer les coefficiens $A$ et $B$ de manière que la fonction $Aa + Bb$ reste la même, au signe près, en y échangeant $a$ en $b$, et réciproquement, condition qui donne

$$Aa + Bb = -(Ab + Ba)$$

équation qui doit avoir lieu, quels que soient $a$ et $b$ ; on en tire en égalant les coefficiens de $a$

$$A = -B$$

comparant ensuite ceux de $b$, on retrouve la même relation ; en sorte que la condition $A = -B$ étant la seule à laquelle il faille satisfaire, on pourra prendre

$$A = 1 \text{ d'où } B = -1$$

La fonction cherchée sera donc $a - b$, et la désignant par $z$, sa valeur dépendra de l'équation

$$[z - (a - b)]\,[(z - (b - a)] = o$$

dont les coefficiens pourront être exprimés d'une manière rationelle au moyen de ceux de la proposée, puisque les racines $a$ et $b$ y entrent de la même manière. En effectuant les multiplications, on trouve

$$z^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

Or des deux équations

$$a^2 + pa + q = o$$
$$b^2 + pb + q = o$$

on déduit

$$a^2 + b^2 = -2q$$

en observant que $a + b = o$ ; on a d'ailleurs

$$ab = q$$

donc

$z^2 = p^2 - 4q$ ; d'où $z = \sqrt{p^2 - 4q} = a - b \ldots (2)$

combinant les égalités (1) et (2), on en déduit

$$a = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

$$b = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Nous passerons à l'équation du troisième degré, que, pour

plus de simplicité, nous supposerons délivrée de son second terme, ou ramenée à la forme

$$x^3 + px + q = o \ldots . (M)$$

Soient $a$, $b$ et $c$ ses trois racines, on aura d'abord

$$a + b + c = o \ldots . (1)$$

Reste à déterminer une autre fonction des racines, qui ne dépende que d'une équation du second degré, et qui, combinée avec l'égalité (1), donne facilement les expressions des racines de la proposée. La forme la plus simple que l'on puisse supposer à cette fonction est celle-ci

$$Aa + Bb + Cc$$

$A$, $B$, $C$ étant des coefficiens indépendans de $a$, $b$, $c$ : si on y fait tous les échanges possibles des racines $a$, $b$, $c$, on aura ces six combinaisons différentes

$$\left.\begin{array}{l} Aa + Bb + Cc \\ Aa + Bc + Cb \\ Ab + Ba + Cc \\ Ab + Bc + Ca \\ Ac + Bb + Ca \\ Ac + Ba + Cb \end{array}\right\} (M)$$

Ainsi l'équation d'où dépendra cette fonction sera du sixième degré ; il faudra donc, pour qu'on ait ramené la question à des termes plus simples, que cette équation soit résoluble à la manière de celles du second degré ; en sorte que les quantités $A$, $B$, $C$ devront être déterminées par la condition qu'il existe entre les fonctions $(M)$ la même relation qu'entre les racines de l'équation

$$y^6 + my^3 + n = o$$

Pour résoudre celle-ci, on fera

$$y^3 = t$$

ce qui la transforme dans la suivante

$$t^2 + mt + n = o$$

dont les racines sont

$$t' = -\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}$$

$$t'' = -\frac{m^2}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}$$

et on obtiendra les six valeurs de $y$ par la résolution des

équations

$$y^3 - t' = o, y^3 - t'' = o$$

qui, par les hypothèses

$$y = z\sqrt[3]{t'},\ y = z\sqrt[3]{t''}$$

deviennent, après avoir divisé la première par $t'$ et la seconde par $t''$

$$z^3 - 1 = o$$

dont les racines sont

$$z = 1; z = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \alpha; z = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \alpha'$$

en sorte que les six valeurs de $y$ seront

$$y = \sqrt[3]{t'}, y = \alpha\sqrt[3]{t'}, y = \alpha'\sqrt[3]{t'}$$

$$y = \sqrt[3]{t''}, y = \alpha\sqrt[3]{t''}, y = \alpha'\sqrt[3]{t''}$$

ou parce que $\alpha' = \alpha^2$

$$y = \sqrt[3]{t'}, y = \alpha\sqrt[3]{t'}, y = \alpha^2\sqrt[3]{t'}$$

$$y = \sqrt[3]{t''}, y = \alpha\sqrt[3]{t''}, y = \alpha^2\sqrt[3]{t''}$$

Telles sont donc les six racines d'une équation du sixième degré, résoluble à la manière d'une équation du second. Il faut donc que deux des combinaisons ($M$) étant prises pour $\sqrt[3]{t'}$ et $\sqrt[3]{t''}$, deux des autres soient $\alpha\sqrt[3]{t'}$ et $\alpha^2\sqrt[3]{t'}$, et que les deux qui restent soient $\alpha\sqrt[3]{t''}$ et $\alpha^2\sqrt[3]{t''}$, quelles que soient d'ailleurs les quantités $a$, $b$ et $c$. Soit

$$Aa + Bb + Cc = \sqrt[3]{t'} \ldots\ldots (1)$$

la combinaison $Aa + Bc + Cb$ ne peut devenir $\alpha\sqrt[3]{t'}$, ou $\alpha^2\sqrt[3]{t'}$ parce qu'en comparant les coefficiens des mêmes racines dans les égalités

$$Aa+Bc+Cb=\alpha Aa+\alpha Bb+\alpha Cc$$
$$Aa+Bc+Cb=\alpha^2 Aa+\alpha^2 Bb+\alpha^2 Cc$$

on auroit

$$A=\alpha A \text{ d'où } \alpha=1$$
$$A=\alpha^2 A \text{ d'où } \alpha^2=1$$

résultats qui ne peuvent avoir lieu. La combinaison $Ab+Ba+Cc$ ne peut devenir $\alpha\sqrt[3]{t'}$ ou $\alpha^2\sqrt[3]{t'}$, parce que, dans le premier cas, on auroit $\alpha=1$; et, dans le second, $\alpha^2=1$. On ne peut donc faire que les deux hypothèses suivantes

$$Ab+Bc+Ca=\alpha Aa+\alpha Bb+\alpha Cc=\alpha\sqrt[3]{t'} \ldots\ldots(2)$$

$$Ac+Ba+Cb=\alpha^2 Aa+\alpha^2 Bb+\alpha^2 Cc=\alpha^2\sqrt[3]{t'} \ldots\ldots(3)$$

puis écrivant

$$Aa+Bc+Cb=\sqrt[3]{t''} \ldots\ldots(4)$$

on supposera

$$Ac+Bb+Ca=\alpha Aa+\alpha Bc+\alpha Cb=\alpha\sqrt[3]{t''} \ldots\ldots(5)$$

$$Ab+Ba+Cc=\alpha^2 Aa+\alpha^2 Bc+\alpha^2 Cb=\alpha^2\sqrt[3]{t''} \ldots\ldots(6)$$

comparant les coefficiens des mêmes lettres dans les équations (2), (3), (5) et (6), on déduira

de (2).....$\alpha A=C$; $\alpha B=A$; $\alpha C=B$
de (3).....$\alpha^2 A=B$; $\alpha^2 B=C$; $\alpha^2 C=A$
de (5).....$\alpha A=C$; $\alpha B=A$; $\alpha C=B$
de (6).....$\alpha^2 A=B$; $\alpha^2 B=C$; $\alpha^2 C=A$

Les équations des deux dernières lignes étant identiquement les mêmes que celles des deux premières, il suffira d'employer celles-ci: or des six premières équations, les trois suivantes

$$C=\alpha A, B=\alpha^2 A, A=\alpha B \text{ ou } A=\alpha^3 A$$

rendent les trois autres identiques, sans cependant déterminer le coefficient $A$; on pourra donc, pour simplifier, faire $A=1$; en sorte que

$$A = 1, B = \alpha^2, C = \alpha$$

Faisant, pour abréger,

$$\sqrt[3]{t'} \text{ ou } r = a + \alpha^2 b + \alpha c \ldots\ldots (7)$$

$$\sqrt[3]{t''} \text{ ou } s = a + \alpha^2 c + \alpha b \ldots\ldots (8)$$

on aura $r, \alpha r, \alpha^2 r; s, \alpha s, \alpha^2 s$ pour les six racines de la transformée résoluble à la manière d'une équation du second degré, et nommant $y$ l'inconnue, on trouvera, en observant que $1 + \alpha + \alpha^2 = o$, et que $\alpha^3 = 1$

$$(y - r)(y - \alpha r)(y - \alpha^2 r) = y^3 - r^3$$
$$(y - s)(y - \alpha s)(y - \alpha^2 s) = y^3 - s^3$$

et conséquemment

$$y^6 - (r^3 + s^3) y^3 + r^3 s^3 = o \ldots\ldots (N)$$

équation qui satisfait à la condition énoncée. Il ne s'agit plus que de trouver, en coefficiens de la proposée, les valeurs de $r^3 + s^3$ et de $r^3 s^3$, ce qui est possible, parce que ces quantités sont, comme on va le voir, des fonctions invariables des racines $a$, $b$ et $c$.

Si on élève au cube la fonction $r$, on aura, en observant que $\alpha^3 = 1$,

$$r^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3\alpha(a^2 c + b^2 a + c^2 b) + 3\alpha^2(a^2 b + b^2 c + c^2 a)$$

et changeant $c$ en $b$ et réciproquement, $r$ devient $s$, on aura donc, sans refaire le calcul,

$$s^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3\alpha(a^2 b + c^2 a + b^2 c) + 3\alpha^2(a^2 c + c^2 b + b^2 a)$$

Soient, pour abréger

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc = L$$
$$a^2 b + b^2 c + c^2 a = M$$
$$a^2 c + b^2 a + c^2 b = N$$

on aura

$$r^3 = L + 3\alpha N + 3\alpha^2 M$$
$$r^3 = L + 3\alpha M + 3\alpha^2 N$$

donc

donc la fonction

$$r^3 + s^3 = 2L + 3(\alpha + \alpha^2)(M + N)$$

mais comme le second terme manque dans l'équation $x^3 - 1 = 0$, on aura

$$1 + \alpha + \alpha^2 = 0 \text{ d'où } \alpha + \alpha^2 = -1$$

et conséquemment

$$r^3 + s^3 = 2L - 3(M + N) \ldots . (P)$$

Faisant ensuite le produit de $r^3$ par $s^3$, il viendra, toutes réductions faites,

$$r^3 s^3 = L^2 - 3L(M + N) + 9(M + N)^2 - 27MN \ldots . (Q)$$

Pour évaluer $L$ d'une manière plus abrégée qu'en employant les formules données (page 315) on partira des trois équations

$$a^3 + pa + q = 0$$
$$b^3 + pb + q = 0$$
$$c^3 + pc + q = 0$$

desquelles on déduit

$$a^3 + b^3 + c^3 = -3q$$

à cause de $a + b + c = 0$, et on a d'ailleurs

$$abc = -q$$

donc

$$L = -9q$$

Reste à calculer $M + N$ et $MN$ : à cet effet, on a

$$M + N = a^2 b + a^2 c + b^2 a + b^2 c + c^2 a + c^2 b$$
$$= T.a^2 b = T.a^2 \times T.a - T.a^3 = 3q$$

parce que $T.a = 0$, et

$$MN = (a^2 b + b^2 c + c^2 a)(a^2 c + b^2 a + c^2 b)$$
$$= a^4 bc + a^2 b^2 c^2 + a^3 b^3$$
$$+ b^4 ac + a^2 b^2 c^2 + a^3 c^3$$
$$+ c^4 ab + a^2 b^2 c^2 + b^3 c^3$$

or

$$a^4 b c + b^4 a c + c^4 a b = abc(a^3 + b^3 + c^3) = 3q^2$$
$$a^2 b^2 c^2 + a^2 b^2 c^2 + a^2 b^2 c^2 = 3(abc)^2 = 3q^2$$
$$a^3 b^3 + a^3 c^3 + b^3 c^3 = \frac{(a^3+b^3+c^3)^2 - (a^6+b^6+c^6)}{2} = 3q^2 + p^3$$

en observant, par rapport à cette dernière évaluation, que, dans le cas de $n=p$, le deuxième membre de la formule (1), donnée (page 321), doit être divisé par 2, pour n'exprimer que la collection des termes dissemblables de la forme $\alpha^n$ &c. Donc

$$MN = p^3 + 9q^2$$

faisant ces substitutions dans $(P)$ et $(Q)$, on trouvera

$$r^3 + s^3 = -27q\,;\ r^3 s^3 = -27p^3$$

de sorte que la réduite $(N)$ deviendra

$$y^6 + 27qy^3 - 27p^3 = 0$$

qui, par l'hypothèse

$$y^3 = t$$

se change dans la suivante

$$t^2 + 27qt - 27p^3 = 0$$

équation qui donne pour $t$ les deux valeurs

$$t' = 27\left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right]$$

$$t'' = 27\left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right]$$

on aura donc

$$r = a + \alpha^2 b + \alpha c = \sqrt[3]{t'}$$

$$s = a + \alpha b + \alpha^2 c = \sqrt[3]{t''}$$

Or les radicaux $\sqrt[3]{t'}$, $\sqrt[3]{t''}$ sont susceptibles chacun de trois valeurs

$$\sqrt[3]{t'},\ \alpha\sqrt[3]{t'},\ \alpha^2\sqrt[3]{t'};\ \sqrt[3]{t''},\ \alpha\sqrt[3]{t''},\ \alpha^2\sqrt[3]{t''}$$

mais on observera que les racines de la proposée doivent satisfaire à la condition

$$ab + ac + bc = +p = -\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{t'} \times \sqrt[3]{t''}$$

d'après les valeurs précédemment trouvées pour $t'$ et $t''$ : on

pourra donc prendre $\sqrt[3]{t'}$ avec $\sqrt[3]{t''}$, ou $\alpha\sqrt[3]{t'}$ avec $\alpha^2\sqrt[3]{t''}$, ou bien $\alpha^2\sqrt[3]{t'}$ avec $\alpha\sqrt[3]{t''}$, parce qu'on a aussi

$$-\frac{p}{3} = \alpha\sqrt[3]{t'} \times \alpha^2\sqrt[3]{t''}$$

$$-\frac{p}{3} = \alpha^2\sqrt[3]{t'} \times \alpha\sqrt[3]{t''}$$

en sorte qu'on pourra employer indifféremment l'un ou l'autre de ces trois systêmes d'équation

$$\left.\begin{array}{ll} 1^\circ.... & a+b+c=0 \\ 2^\circ.... & a+\alpha^2 b+\alpha c=\sqrt[3]{t'} \\ 3^\circ.... & a+\alpha b+\alpha^2 c=\sqrt[3]{t''} \end{array}\right\} .... (1^\circ)$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ \alpha a+b+\alpha^2 c=\alpha\sqrt[3]{t'} \\ \alpha^2 a+b+\alpha c=\alpha^2\sqrt[3]{t''} \end{array}\right\} .... (2^\circ)$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ \alpha^2 a+\alpha b+c=\alpha^2\sqrt[3]{t'} \\ \alpha a+\alpha^2 b+c=\alpha\sqrt[3]{t''} \end{array}\right\} .... (3)$$

pour évaluer les racines $a$, $b$ et $c$. Cette multiplicité de valeurs des racines $a$, $b$ et $c$ tient à ce que $\sqrt[3]{t'}$ et $\sqrt[3]{t''}$ ne contiennent que le cube de $p$; en sorte que les racines $a$, $b$ et $c$ qu'on vient de trouver résolvent, outre la proposée, les deux autres équations

$$x^3+\alpha p x+q=0$$

$$x^3+\alpha^2 p x+q=0$$

Employant le premier des trois systêmes, ajoutant les trois équations qu'il contient, et faisant attention que $1+\alpha+\alpha^2=0$, il viendra

$$a = \frac{\sqrt[3]{t'} + \sqrt[3]{t''}}{3}$$

multipliant (2°.) par $\alpha$ et (3°.) par $\alpha^2$, puis ajoutant, on aura

$$b = \frac{\alpha\sqrt[3]{t'} + \alpha^2\sqrt[3]{t''}}{3}$$

multipliant (2°) par $\alpha^2$ et (3°) par $\alpha$, puis ajoutant, on trouvera

$$c = \frac{\alpha^2\sqrt[3]{t'} + \alpha\sqrt[3]{t''}}{3}$$

Ecrivant dans $a$, $b$ et $c$ pour $t'$ et $t''$ les valeurs obtenues précédemment, on aura enfin

$$a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$b = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$c = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Soit enfin l'équation générale du quatrième degré, délivrée de son second terme

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

dont $a$, $b$, $c$ et $d$ sont les racines. Nous chercherons, comme nous l'avons fait à l'égard des équations des second et troisième degrés, une fonction de ces racines, qui ne dépende que d'une équation d'un degré inférieur au quatrième, et dont les

valeurs combinées avec l'équation

$$a+b+c+d=0$$

donne facilement les quatre racines. Nous ferons encore l'hypothèse qui a réussi jusqu'ici, savoir, que cette fonction renferme les racines sous une forme linéaire, ou qu'elle soit

$$Aa+Bb+Cc+Dd$$

$A$, $B$, $C$ et $D$ étant des coefficiens indépendans de $a$, $b$, $c$ et $d$. Cette fonction est susceptible de vingt-quatre combinaisons différentes; elle dépendra donc d'une équation du vingt-quatrième degré: mais si on suppose

$$A=B$$

dans ces vingt-quatre combinaisons, elles se réduiront à douze et si, de plus, on fait

$$C=D$$

les douze se réduiront à six; en sorte que la fonction

$$A(a+b)+C(c+d)$$

ne dépendra que d'une équation du sixième degré dont les six racines seront

$$A(a+b)+C(c+d)$$
$$A(c+d)+C(a+b)$$
$$A(a+d)+C(b+c)$$
$$A(b+c)+C(a+d)$$
$$A(a+c)+C(b+d)$$
$$A(b+d)+C(a+c)$$

Ces fonctions, en y faisant encore

$$A=-C$$

deviendront égales deux à deux et de signes contraires; l'équation dont elles seront les racines ne renfermera donc que les puissances paires de l'inconnue; conséquemment elle pourra se résoudre à la manière des équations du troisième degré. Ces combinaisons seront

$$A(a+b-c-d);\ A(c+d-a-b);\ A(a+d-b-c);$$
$$A(b+c-a-d);\ A(a+c-b-d);\ A(b+d-a-c);$$

Supposant, pour plus de simplicité,

$$A = 1$$

l'équation cherchée sera donc

$$[z^2-(a+b-c-d)^2][z^2-(a+c-b-d)^2][z^2-(a+d-b-c)^2]=0$$

ou, faisant $z^2 = t$

$$[t-(a+b-c-d)^2][t-(a+c-b-d)^2][t-(a+d-b-c)^2]=0$$

Il s'agit maintenant d'exprimer les coefficiens de cette réduite au moyen de ceux de la proposée : or on a

$$(a+b-c-d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2ac-2ad$$
$$-2bc-2bd-2cd+4ab+4cd$$

et observant que de $(a+b+c+d)\ (a+b+c+d)=0$ résulte

$$-2ab-2ac-2ad-2bc-2bd-2cd=a^2+b^2+c^2+d^2$$

on trouve

$$(a+b-c-d)^2=-4p+4(ab+cd)$$

Changeant dans la relation précédente $b$ en $c$, et réciproquement, on aura

$$(a+c-b-d)^2=-4p+4(ac+bd)$$

changeant dans celle-ci $c$ en $d$, et réciproquement, il viendra

$$(a+d-b-c)^2=-4p+4(ad+bc)$$

l'équation en $t$ devient donc

$$[t+4p-4(ab+cd)][t+4p-4(ac+bd)][t+4p-4(ad+bc)]=0$$

ou supposant

$$t=4u \text{ et } u+p=y$$

puis divisant par 4, elle se change dans la suivante

$$[y-(ab+cd)][y-(ac+bd)][y-(ad+cb)]=0$$

et faisant les multiplications indiquées

$$y^3-(ab+ac+ad+bc+bd+cd)y^2+\left\{\begin{matrix}+(ab+dc)(ac+bd)\\+(ab+dc)(ad+bc)\\+(ac+bd)(ad+bc)\end{matrix}\right\}y$$
$$-(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)=0$$

or

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=p.....(1)$$

$$(ab+cd)\,(ac+bd)=a^2bc+c^2ad+b^2ad+d^2bc$$

$$(ab+cd)\,(ad+bc)=a^2bd+d^2ac+b^2ac+c^2bd$$

$$(ac+bd)\,(ad+bc)=a^2cd+d^2ab+c^2ab+b^2cd$$

ajoutant ces trois derniers résultats, on trouve, en désignant la somme des trois premiers membres par $S$,

$$S=\left\{\begin{matrix}a\,(abc+abd+acd+bcd)-abcd\\+b\,(abc+abd+acd+bcd)-abcd\\+d\,(abc+abd+acd+bcd)-abcd\\+d\,(abc+abd+acd+bcd)-abcd\end{matrix}\right\}=-q(a+b+c+d)-4r=-4r....(2)$$

à cause de $a+b+c+d=0$. Passant au dernier terme, on a

$$\begin{aligned}(ab+cd)\,(ac+bd)\,(ad+bc)=\;&a^3bcd+a^2b^2c^2\\&+b^3acd+a^2b^2d^2\\&+c^3abd+a^2c^2d^2\\&+d^3abc+b^2c^2d^2\end{aligned}$$

or

$$a^3bcd+b^3acd+c^3abd+d^3abc$$
$$=(a^2+b^2+c^2+d^2)\,abcd=-2pr.....(3)$$

Pour évaluer la fonction $a^2b^2c^2+a^2b^2d^2+a^2c^2d^2+b^2c^2d^2$, on développera

$$\begin{aligned}(abc+abd+acd+bcd)^2\\=a^2b^2c^2+a^2b^2d^2+a^2c^2d^2+b^2c^2d^2\\+2a^2b^2cd+2a^2c^2bd+2a^2d^2bc\\+2b^2c^2ad+2b^2d^2ac+2c^2d^2ab\end{aligned}$$

d'où on tire

$$\left\{\begin{matrix}a^2b^2c^2+a^2b^2d^2+a^2c^2d^2+b^2c^2d^2\\=(abc+abd+acd+bcd)^2\\-2abcd(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\end{matrix}\right\}=q^2-2pr....(4)$$

substituant ces valeurs (1), (2), (3) et (4) dans l'équation en $y$, elle deviendra

$$y^3-py^2-4ry+4pr-q^2=0$$

mettant pour $y$ sa valeur $u+p$, on aura pour résultat

$$u^3+2pu^2+(p^2-4r)\,u-q^2=0$$

Soient $u'$, $u''$, $u'''$ les trois racines de cette équation, on aura, en observant que $t = 4u$,

$$(a+b-c-d)^2 = 4u'$$
$$(a+c-b-d)^2 = 4u''$$
$$(a+d-b-c)^2 = 4u'''$$

d'où

$$a+b-c-d = \pm 2\sqrt{u'} \ldots\ldots (1)$$
$$a+c-b-d = \pm 2\sqrt{u''} \ldots\ldots (2)$$
$$a+d-b-c = \pm 2\sqrt{u'''} \ldots\ldots (3)$$

les équations (1), (2) et (3) combinées avec

$$a+b+c+d = 0 \ldots\ldots (4)$$

donnent, en prenant les radicaux avec le signe +,

$$a = \tfrac{1}{4}\left[+\sqrt{u'}+\sqrt{u''}+\sqrt{u'''}\right]$$
$$b = \tfrac{1}{4}\left[+\sqrt{u'}-\sqrt{u''}-\sqrt{u'''}\right]$$
$$c = \tfrac{1}{4}\left[-\sqrt{u'}+\sqrt{u''}-\sqrt{u'''}\right]$$
$$d = \tfrac{1}{4}\left[-\sqrt{u'}-\sqrt{u''}+\sqrt{u'''}\right].$$

chacun des radicaux pouvant être pris avec le signe —, il en résulte pour $a$, $b$, $c$ et $d$ ces quatre autres valeurs

$$a = \tfrac{1}{4}\left[-\sqrt{u'}-\sqrt{u''}-\sqrt{u'''}\right]$$
$$b = \tfrac{1}{4}\left[-\sqrt{u'}+\sqrt{u''}+\sqrt{u'''}\right]$$
$$c = \tfrac{1}{4}\left[+\sqrt{u'}-\sqrt{u''}+\sqrt{u'''}\right]$$
$$d = \tfrac{1}{4}\left[+\sqrt{u'}+\sqrt{u''}-\sqrt{u'''}\right]$$

Mais on a

$$\left.\begin{array}{l}(a+b-c-d)(a+c-b-d)(a+d-b-c)\\ \quad = 2(a^3+b^3+c^3+d^3)+2(abc+abd+acd+bcd)\end{array}\right\} = -8q$$

en sorte que le coefficient $q$ étant positif dans la proposée, il faudra prendre un ou trois radicaux négativement : s'il est négatif, on pourra prendre les trois radicaux en plus, ou deux en moins et un en plus. Cette considération réduit donc les huit racines à quatre.

## *Examen des racines des équations des troisième et quatrième degrés.*

On a prouvé qu'une équation d'un degré quelconque a toutes ses racines réelles lorsque l'équation aux carrés des différences de ces racines n'a que des variations de signes ; mais que si elle contient seulement une permanence, la proposée doit avoir au moins deux racines imaginaires. Ces conditions ont été appliquées (page 336) à l'équation du troisième degré, et on a trouvé que dans le cas de

$$p < 0 \text{ et } \frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$$

les trois racines de l'équation

$$x^3 + p\,x + q = 0$$

étaient réelles ; mais si l'une de ces inégalités n'a pas lieu, deux des racines de la proposée sont imaginaires. On parvient aux mêmes conclusions en discutant les formules des racines de l'équation du troisième degré.

Reprenons donc les trois racines obtenues précédemment

$$a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$b = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$c = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Si $p$ est positif, ou si $\frac{q^2}{4} > \frac{p^3}{27}$ dans le cas de $p$ négatif, la racine $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ sera réelle, et conséquemment aussi la

première racine $a$ ; mais $b$ et $c$ seront imaginaires, comme il est facile de le déduire de la forme même de ces racines. En effet, si on pose

$$\sqrt{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=m;$$

$$\sqrt{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=n;-\frac{1}{2}=l,\ \frac{\sqrt{3}}{2}=k$$

on aura

$$b=(l+k\sqrt{-1})m+(l-k\sqrt{-1})n$$
$$=l(m+n)+k(m-n)\sqrt{-1}$$

$$c=(l-k\sqrt{-1})m+(l+k\sqrt{-1})n$$
$$=l(m+n)-k(m-n\sqrt{-1})$$

quantités imaginaires de la forme $A\pm B\sqrt{-1}$, puisque $a, b, m$ et $n$ sont des quantités réelles. Dans le cas de

$$p<0 \text{ et } \frac{p^3}{27}=\frac{q^2}{4}$$

on a $m=n$, et

$$a=2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}};\ b=-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}};\ c=-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$$

en sorte que les trois racines sont encore réelles, et les deux dernières égales entre elles.

Les trois racines sont donc réelles dans le cas où celles de la réduite du second degré sont imaginaires, c'est-à-dire, lorsque la quantité $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$, qui se trouve sous le signe radical, est négative, et on sait, *à priori*, qu'effectivement elles le sont; car la condition

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$$

suppose ces deux-ci

$$p<0 \text{ et } \frac{q^2}{4}<\frac{p^3}{27}$$

Les trois racines peuvent être écrites ainsi qu'il suit

$$a = \sqrt[3]{f+g\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{f-g\sqrt{-1}}$$

$$b = (l+k\sqrt{-1})\sqrt[3]{f+g\sqrt{-1}} + (l-k\sqrt{-1})\sqrt[3]{f-g\sqrt{-1}}$$

$$c = (l-k\sqrt{-1})\sqrt[3]{f+g\sqrt{-1}} + (l+k\sqrt{-1})\sqrt[3]{f-g\sqrt{-1}}$$

et on n'apperçoit plus aussi facilement, d'après la forme de ces quantités, comme elles sont toutes trois réelles. En admettant le développement en série de $\sqrt[3]{f+g\sqrt{-1}}$ et $\sqrt[3]{f-g\sqrt{-1}}$, on trouve que les termes imaginaires disparoissent par l'opposition des signes dans la première, et que les multiplications faites dans les deux autres, les résultats ne contiennent plus que des termes réels; mais toutes trois sont alors données par des suites infinies, et comme on n'a pu jusqu'ici les obtenir sous une forme en même temps réelle et finie, à moins d'employer les lignes trigonométriques, on a désigné cette circonstance sous le nom de *cas irréductible*.

Nous examinerons donc à quoi tient l'introduction d'une imaginaire dans ces racines qu'on sait, *à priori*, devoir être réelles. A cet effet nous reprendrons l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

En supposant que $a$, $b$ et $c$ soient les trois racines, on aura

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = x^3 + px + q$$

d'où résultent ces égalités

$$a+b+c = 0\,;\; ab+ac+bc = p\,;\; abc = -q$$

Comme l'équation proposée est d'un degré impair, on est assuré d'avance qu'elle a, au moins, une racine réelle et la désignant par $c$, on déduira de

$$c = -(a+b)$$

que la somme $a+b$ des deux autres racines est aussi réelle. Cette valeur substituée dans les deux dernières équations, donnera

$$a^2+ab+b^2=-p;\ ab(a+b)=q$$

d'où il faudroit conclure $a$ et $b$. La dernière donne

$$ab=\frac{q}{a+b}$$

donc $ab$ est aussi une quantité réelle. Considérons maintenant la quantité $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ ou $27q^2+4p^3$ du signe de laquelle dépend le cas irréductible: si on l'exprime au moyen de $a$ et de $b$, on trouvera, après les réductions faites,

$$27q^2+4p^3=-(2a^3-2b^3+3a^2b-3ab^2)^2$$

d'où

$$\sqrt{-(27q^2+4p^3)}=2a^3-2b^3+3a^2b-3ab^2$$

$$=(a-b)(2a^2+2b^2+5ab)=(a-b)\{2(a+b)^2+ab\}$$

Or les deux quantités $a+b$ et $ab$ sont réelles, comme on l'a déjà vu; donc, pour que la différence $a-b$ soit réelle, il faut que la quantité $(27q^2+4p^3)$ soit négative, ce qui est le cas irréductible; d'où il suit qu'alors les deux autres racines $a$ et $b$ seront aussi réelles. Cherchons maintenant à évaluer les racines $a$ et $b$ en coefficiens de la proposée: nous avons trouvé l'équation

$$a^3-b^3+\tfrac{3}{2}a^2b-\tfrac{3}{2}ab^2=\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\sqrt{27q^2+4p^3}$$

Ajoutant au premier membre $m\times ab(a+b)$, et au second $mq$ qui n'est autre chose que $-mabc$, à cause de

$$a+b+c=0$$

on aura

$$a^3-b^3+(\tfrac{3}{2}+m)a^2b+(m-\tfrac{3}{2})ab^2=$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\sqrt{27q^2+4p^3}+mq.....(1)$$

Il s'agit de déterminer $m$ par la condition que le premier membre devienne un cube parfait: à cet effet, on le comparera avec

$$(\alpha a-\alpha^2 b)^3=a^3-b^3-3\alpha a^2b+3\alpha^2 ab^2$$

$\alpha$ et $\alpha^2$ étant $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; d'où on déduit

$$\left.\begin{aligned}\tfrac{3}{2}+m&=-3\alpha=-3\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\\ -\tfrac{3}{2}+m&=3\alpha^2=+3\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\end{aligned}\right\}\text{d'où}\left\{\begin{aligned}m&=\frac{-3\sqrt{-3}}{2}\\ m&=\frac{-3\sqrt{-3}}{2}\end{aligned}\right.$$

On a aussi

$$(\alpha^2 a-\alpha b)^3=a^3-b^3-3\alpha^2 a^2 b+3\alpha a b^2$$

et comparant avec le premier membre de (1), on obtient

$$\left.\begin{aligned}\tfrac{3}{2}+m&=-3\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)\\ -\tfrac{3}{2}+m&=3\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\end{aligned}\right\}\text{ d'où }\left\{\begin{aligned}m&=\frac{3\sqrt{-3}}{2}\\ m&=\frac{3\sqrt{-3}}{2}\end{aligned}\right.$$

on a donc, pour déterminer $a$ et $b$, les deux équations

$$\alpha a-\alpha^2 b=\sqrt[3]{\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\sqrt{27q^2+4p^3}-\frac{5\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}q\right]}$$

$$=\sqrt[3]{\left[\frac{-3\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\left\{q-\frac{1}{3\sqrt{3}}\sqrt{27q^2+4p^3}\right\}\right]}=P$$

$$\alpha^2 a-\alpha b=\sqrt[3]{\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\sqrt{27q^2+4p^3}+\frac{5\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}q\right]}$$

$$=\sqrt[3]{\left[\frac{+3\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\left\{q+\frac{1}{3\sqrt{3}}\sqrt{27q^2+4p^3}\right\}\right]}=Q$$

Reste donc à éliminer $a$ et $b$ entre les deux équations,

$$\alpha a-\alpha^2 b=P\ldots.(2).$$
$$\alpha^2 a-\alpha b=Q\ldots.(3).$$

à cet effet, multipliant (2) par $\alpha^2$ et (3) par $\alpha$, puis retranchant le premier produit du second, on aura

$$b=\frac{\alpha Q-\alpha^2 P}{\alpha-\alpha^3}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left\{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right\}}$$

$$+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left\{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right\}}$$

$$u^3 + 2pu^2 + (p^2 - 4r)u - q^2 = 0$$

Si les racines $u'$, $u''$ et $u'''$ sont réelles et positives, il est visible que les quatre racines de la proposée seront réelles; mais si parmi les racines de la réduite, il y en a de négatives, les quatre racines de la proposée seront imaginaires; il faut cependant en excepter le cas où des trois racines réelles de la réduite, l'une $u'$ est positive, et les autres $u''$ et $u'''$ sont négatives et égales entr'elles; car alors des quatre racines $a$, $b$, $c$ et $d$, deux seront réelles, et les deux autres imaginaires. Ainsi, outre la condition de la réalité des trois racines de la réduite, il faudra encore, pour le premier cas, suivant la règle de *Descartes*, (*règle des signes*) que les coefficiens des termes de cette réduite, soient alternativement positifs et négatifs, et que par conséquent on ait

$$p < 0 \text{ et } p^2 > 4r$$

Si l'une de ces conditions manque, la proposée aura ses quatre racines imaginaires, à moins qu'on ne tombe dans le cas ci-dessus cité. Si la réduite n'a qu'une seule racine réelle, on observera d'abord qu'à cause du dernier terme négatif de cette réduite, la racine réelle sera nécessairement positive : les deux racines imaginaires seront de la forme $f \pm g\sqrt{-1}$ : prenant donc $u'$ pour la racine réelle, $u''$ et $u'''$ pour les deux imaginaires, les deux racines $a$ et $b$ seront réelles, puisque (pages 327 et suiv.) ..... $\sqrt{f+g\sqrt{-1}} + \sqrt{f-g\sqrt{-1}}$ est une quantité réelle $= \sqrt{2f + 2\sqrt{f^2+g^2}}$ et, au contraire ..... $\sqrt{f+g\sqrt{-1}} - \sqrt{f-g\sqrt{-1}}$ est une quantité imaginaire; en sorte que des quatre racines trouvées, les deux premières seront réelles, et les deux autres imaginaires.

Nous rapporterons ici la méthode qui paroît avoir servi à la première résolution des équations du troisième degré, et qu'on appelle communément méthode de *Cardan*, quoiqu'il semble, dit *Lagrange*, que c'est de *Hudde* que nous la tenons.

Toute équation du troisième degré, privée de son second terme, est de la forme

$$x^3 + px + q = 0$$

Supposons

$$x = y + z$$

ce qui revient à partager le nombre $x$ en deux parties $y$ et $z$, dont l'une pourra conséquemment être prise à volonté, pourvu que l'autre en soit le complément à $x$ : la substitution dans la proposée donnera la transformée

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + p(y+z) + q = 0$$

or $3y^2z + 3yz^2 = 3yz(y+z)$, de sorte qu'on aura

$$y^3 + z^3 + (3yz + p)(y+z) + q = 0$$

Si maintenant on suppose à $z$ une valeur telle qu'il en résulte

$$3yz + p = 0. \ldots\ldots (1)$$

il restera

$$y^3 + z^3 + q = 0. \ldots\ldots (2)$$

équations au moyen desquelles ou pourra évaluer $y$ et $z$, et conséquemment $x$. De la première on tire

$$z = -\frac{p}{3y}$$

substituant dans la seconde et réduisant, on obtient cette équation du sixième degré qu'on appelle la réduite

$$y^6 + qy^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

laquelle ne contenant que deux puissances de l'inconnue dont l'une est le quarré de l'autre, est résoluble à la manière des équations du second degré, et donne sur le champ

$$y^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

et extrayant la racine cubique

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

mais

$$x = y + z = y - \frac{p}{3y}$$

en mettant pour $z$ sa valeur $-\frac{p}{3y}$, et d'ailleurs

$$\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\right) \times \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\right) = -\frac{p}{3}$$

d'où

d'où on déduit

$$-\frac{p}{3y}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

donc

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

expression où l'on voit que le radical quarré qui se trouve sous le radical cubique est pris en plus et en moins, en sorte qu'il ne peut y avoir aucune ambiguité. Soient $\alpha$ et $\alpha^2$ les deux racines cubiques imaginaires de l'unité, et

$$A=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\ B=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

on aura

$$y=\sqrt[3]{A}.\ \ldots\ x=\sqrt[3]{A}-\frac{p}{3\sqrt[3]{A}}$$

$$y=\alpha\sqrt[3]{A}.\ \ldots\ x=\alpha\sqrt[3]{A}-\frac{p}{3\alpha\sqrt[3]{A}}$$

$$y=\alpha^2\sqrt[3]{A}.\ \ldots\ x=\alpha^2\sqrt[3]{A}-\frac{p}{3\alpha^2\sqrt[3]{A}}$$

mais à cause de

$$\sqrt[3]{B}=-\frac{p}{3\sqrt[3]{A}},\ \alpha^3=1 \text{ d'où } \frac{1}{\alpha}=\alpha^2 \text{ et } \frac{1}{\alpha^2}=\alpha$$

les trois racines de la proposée seront exprimées ainsi qu'il suit

$$x=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$$
$$x=\alpha\sqrt[3]{A}+\alpha^2\sqrt[3]{B}$$
$$x=\alpha^2\sqrt[3]{A}+\alpha\sqrt[3]{B}$$

On aurait pu parvenir directement aux résultats que nous venons de trouver, en remarquant que les équations (1) et (2) donnent

$$y^3+z^3=-q \quad \text{et} \quad y^3z^3=-\frac{p^3}{27}$$

d'où l'on conclut, sur-le-champ, que $y^3$ et $z^3$ sont les racines d'une équation du second degré dont la première puissance de l'inconnue sera multipliée par $q$ et dont le terme connu sera $-\frac{p^3}{27}$ : cette équation sera donc

$$u^2 + q\,u - \frac{p^3}{27} = 0$$

et nommant $A$ et $B$ ses deux racines, on aura

$$y = \sqrt[3]{A}, \quad z = \sqrt[3]{B}$$

$A$ et $B$ ayant les mêmes acceptions que ci-dessus. Or on a

$$y = \sqrt[3]{A}, y = \alpha\sqrt[3]{A}, y = \alpha^2\sqrt[3]{A}$$

$$z = \sqrt[3]{B}, z = \alpha\sqrt[3]{B}, z = \alpha^2\sqrt[3]{B}$$

d'où on croiroit pouvoir conclure neuf racines ; mais l'équation

$$y\,z = -\frac{p}{3}$$

dont nous n'avons employé que le cube, limite le nombre de ces combinaisons, et il est aisé de voir que les valeurs de $z$ qu'on doit combiner par voie d'addition avec $\sqrt[3]{A}$, $\alpha\sqrt[3]{A}$, $\alpha^2\sqrt[3]{A}$ sont $\sqrt[3]{B}$, $\alpha^2\sqrt[3]{B}$, $\alpha\sqrt[3]{B}$ : d'où résultent les trois valeurs de $x$ trouvées plus haut.

On peut aussi parvenir aux formules des racines du quatrième degré d'une manière moins directe que celle qui a été exposée (page 345 et suiv.), mais qui, d'un autre côté, a l'avantage d'être analogue à celle de *Cardan*, pour le troisième degré. Soit, à cet effet, l'équation

$$x^4 + p\,x^2 + q\,x + r = 0$$

on supposera

$$x = y + z + t$$

et on aura d'abord

$$x^2 = (y^2 + z^2 + t^2) + 2(y\,z + y\,t + z\,t)$$

et quarrant de nouveau

$$x^4 = (y^2 + z^2 + t^2)^2$$
$$+ 4(y^2 + z^2 + t^2)(y\,z + y\,t + z\,t) + 4(y\,z + y\,t + z\,t)^2$$

or

$$(yz+yt+zt)^2 = y^2z^2+y^2t^2+z^2t^2+2yzt(y+z+t)$$

substituant ces valeurs de $x$, $x^2$, $x^4$ dans la proposée, et rassemblant les termes qui se trouvent multipliées par $y+z+t$, ainsi que ceux qui ont pour facteur commun $yz+yt+zt$, on aura la transformée

$$(y^2+z^2+t^2)^2+p(y^2+z^2+t^2)$$
$$+[4(y^2+z^2+t^2)+2p]\{yz+yt+zt\}$$
$$+4(y^2z^2+y^2t^2+z^2t^2)+(8yzt+q)(y+z+t)+r=0$$

Maintenant, à l'imitation de l'hypothèse qui a réussi dans la résolution de l'équation du 3e degré, nous supposerons

$$8yzt+q=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$4(y^2+z^2+t^2)+2p=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

et il restera l'équation

$$(y^2+z^2+t^2)^2+p(y^2+z^2+t^2)$$
$$+4(y^2z^2+y^2t^2+z^2t^2)+r=0 \quad \ldots \quad (3)$$

au moyen des équations (1), (2) et (3), on déterminera les trois quantités $y$, $z$ et $t$. La seconde donne d'abord

$$y^2+z^2+t^2=-\frac{p}{2}$$

cette valeur substituée dans (3), la change dans la suivante

$$y^2z^2+y^2t^2+z^2t^2=\frac{p^2}{16}-\frac{r}{4}$$

de plus la première étant élevée au quarré donne

$$y^2z^2t^2=\frac{q^2}{64}$$

donc, d'après la théorie générale de la formation des équations, les quantités $y^2$, $z^2$, $t^2$ seront les racines d'une équation du troisième degré de la forme

$$u^3+\frac{p}{2}u^2+\left(\frac{p^2}{16}-\frac{r}{4}\right)u-\frac{q^2}{64}=0$$

de sorte que si l'on désigne par $u'$, $u''$ et $u'''$ les trois racines de cette équation qu'on appelle *la réduite*, on aura

$$y=\sqrt{u'}, \quad z=\sqrt{u''}, \quad t=\sqrt{u'''}$$

$u'$, $u''$ et $u'''$ n'ayant pas ici identiquement les mêmes valeurs qu'à la page 356, et la valeur de $x$ sera exprimée par

$$\sqrt{u'} + \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}$$

Comme ces trois radicaux peuvent être pris chacun avec les signes plus et moins, on aurait, en faisant toutes les combinaisons possibles, huit valeurs différentes de $x$; mais il faut observer que, dans l'analyse précédente, nous avons employé

$$y^2 z^2 t^2 = \frac{q^2}{64}$$

ou le quarré de

$$yzt = -\frac{q}{8}$$

il faudra donc que le produit des trois quantités $x$, $y$ et $z$, c'est-à-dire, des trois radicaux $\sqrt{u'}$, $\sqrt{u''}$, $\sqrt{u'''}$, soit de signe contraire à celui de la quantité $q$ : d'où il suit

1°. que $q$ étant une quantité négative, on devra prendre les trois radicaux en plus, ou deux en moins et un en plus, ce qui ne donne que les quatre combinaisons

$$a = +\sqrt{u'} + \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}$$
$$b = +\sqrt{u'} - \sqrt{u''} - \sqrt{u'''}$$
$$c = -\sqrt{u'} + \sqrt{u''} - \sqrt{u'''}$$
$$d = -\sqrt{u'} - \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}$$

qui seront conséquemment les quatre racines de la proposée

2°. que $q$ étant une quantité positive, il devra se trouver dans l'expression de $x$ ou trois radicaux négatifs, ou un négatif et deux positifs, ce qui fournira les quatre combinaisons

$$a = -\sqrt{u'} - \sqrt{u''} - \sqrt{u'''}$$
$$b = -\sqrt{u'} + \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}$$
$$c = +\sqrt{u'} - \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}$$
$$d = +\sqrt{u'} + \sqrt{u''} - \sqrt{u'''}$$

Ces formules sont de même forme que celles auxquelles on est parvenu (page 356).

*Résolution par les lignes trigonométriques des équations des degrés supérieurs.*

Les propriétés des lignes trigonométriques fournissent

une résolution facile des équations des troisième et quatrième degrés, et les tables de sinus, cosinus, etc., servent ensuite à évaluer numériquement les racines de ces équations. Ce procédé de résolution et le secours qu'offrent les tables sont tels qu'on en tire avantage même à l'égard des équations du second degré. Soit donc l'équation

$$x^2 + px \pm q = 0$$

dans laquelle nous supposerons d'abord $q$ positif : faisant

$$x = z\sqrt{q} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

on aura

$$qz^2 + pz\sqrt{q} + q = 0 \text{ ou } z^2 + \frac{p}{\sqrt{q}}z + 1 = 0$$

ou divisant par $z$

$$z + \frac{1}{z} = -\frac{p}{\sqrt{q}} \ldots\ldots\ldots (2)$$

1°. Si $-\frac{p}{2\sqrt{q}}$ est, abstraction faite du signe, moindre que l'unité, on fera

$$z = cos.\ u + sin.\ u\sqrt{-1}$$

ensorte que l'équation (2) deviendra

$$cos.\ u + \sqrt{-1}.sin.\ u + \frac{1}{cos.\ u + \sqrt{-1}\ sin.\ u} = 2\ cos.\ u$$

en multipliant les deux termes de la fraction par ..... $cos.\ u - \sqrt{-1}.sin.\ u$ : on déduit de-là

$$cos.\ u = -\frac{p}{2\sqrt{q}}$$

Les tables de sinus feront connoître l'angle $u$, et comme à la même valeur de $cos\ u$ répondent les angles $+u$ et $-u$, on aura pour $z$ et conséquemment pour $x$ deux valeurs qui seront imaginaires ; ce qui doit arriver puisqu'on a, dans l'hypothèse actuelle, $q > \frac{p^2}{4}$

2°. Si le nombre $-\frac{p}{2\sqrt{q}}$ est, abstraction faite du signe, plus grand que l'unité, on fera

$$z = tang.\ u$$

et on aura

$$z+\frac{1}{z}=tang.\,u+\frac{1}{tang.\,u}=\frac{sin.^2u+cos.^2u}{sin.\,u\,cos.\,u}=\frac{2}{sin.\,2u}=-\frac{p}{\sqrt{}}$$

d'où on tire

$$sin.\,2u=-\frac{2\sqrt{q}}{p}$$

Les tables de sinus donneront le plus petit des angles qui répondent à cette expression de sin $2u$, prise positivement : cet angle, pris avec le signe moins, sera la valeur de $2u$; mais à ce sinus répondent les deux arcs $2u$ et $c-2u$, $c$ étant la demi-circonférence : on aura donc pour les deux valeurs de $x$

$$x=\sqrt{q}\times tang.\,u;\; x=\sqrt{q}\times tang.\left(\frac{c}{2}-u\right)$$

racines réelles et négatives.

Dans le cas de $q$ négatif, auquel correspond

$$z-\frac{1}{z}=-\frac{p}{\sqrt{q}}$$

on fera

$$\frac{1}{z}=tang.\,u$$

d'où

$$z-\frac{1}{z}=\left(-tang.\,u+\frac{1}{tang.\,u}\right)=\frac{1-tang.^2u}{tang.\,u}=+\frac{2}{tang.2u}$$

et conséquemment

$$tang.\,2u=-\frac{2\sqrt{q}}{p}$$

Les tables de sinus feront connaître le plus petit des angles qui répondent à cette expression de *tang.* $2u$, prise positivement ; mais à la tangente négative de $2u$ répondent les deux arcs $2u$ et $c+2u$, on aura donc

$$x=\sqrt{q}\times tang.\,u\;;\; x=\sqrt{q}\times tang.\left(\frac{c}{2}+u\right)$$

c'est-à-dire, deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative.

Passons à l'équation du troisième degré

$$x^3\mp px+q=0$$

et supposons

$$x=r\left(z\pm\frac{1}{z}\right)\ldots\ldots(1)$$

$r$ étant une quantité indéterminée : nous aurons

$$x^3 \mp px + q = r^3\left(z^3 \pm \frac{1}{z^3}\right) \pm (3r^3 - pr)\left(z \pm \frac{1}{z}\right) + q = 0$$

déterminant $r$ au moyen de l'équation

$$3r^3 - pr = 0 \text{ on aura } r = \sqrt{\frac{p}{3}}$$

la valeur de $z$ dépendra d'une réduite du sixième degré résoluble à la manière du second : en effet il restera

$$r^3\left(z^3 \pm \frac{1}{z^3}\right) + q = 0 \text{ d'où } z^3 \pm \frac{1}{z^3} = -\frac{q}{r^3} = -\frac{3q\sqrt{3}}{p\sqrt{p}} = 2h \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) serviront ensemble à résoudre la proposée. Supposons d'abord que le signe supérieur ait lieu, et que le nombre $h$ soit, abstraction faite du signe, moindre que l'unité, alors la quantité $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$ est négative, et la proposée tombe dans le cas irréductible (page 359) : que l'on fasse

$$z = \cos. u + \sqrt{-1}\ \sin. u$$

d'où

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 2\cos. u \times \sqrt{\frac{p}{3}} \ldots\ldots (3)$$

et de-là, d'après le théorême (*),

$$(\cos. u \pm \sqrt{-1}\ \sin. u)^m = \cos mu \pm \sqrt{-1}\ \sin. mu$$

---

(*) Supposant le rayon $= 1$, on a la formule

$$\cos.^2 u + \sin.^2 u = 1$$

dont le premier membre peut être regardé comme le produit des deux facteurs imaginaires $\cos. u + \sin. u\sqrt{-1}$ et $\cos. u - \sin. u\sqrt{-1}$. Si on multiplie ensemble deux facteurs semblables $\cos. u + \sin. u\sqrt{-1}$, $\cos. u' + \sin. u'\sqrt{-1}$, on aura pour produit

$$\cos. u \cos. u' - \sin. u \sin. u' + (\sin. u \cos. u' + \sin. u' \cos. u)\sqrt{-1}$$

qui se réduit à la forme

$$\cos.(u + u') + \sin.(u + u')\sqrt{-1}$$

laquelle est semblable à chacun des facteurs. On a donc en général

$$(\cos. u + \sin. u\sqrt{-1})(\cos. u' + \sin. u'\sqrt{-1}) = \cos.(u+u') + \sin.(u+u')\sqrt{-1}$$

et il est remarquable que la multiplication de ces sortes de quantités s'exécute en ajoutant seulement les arcs, ce qui est une propriété analogue à celle des logarithmes. On en conclura successivement

$$(\cos. u + \sin. u\sqrt{-1})(\cos. u + \sin. u\sqrt{-1}) = \cos. 2u + \sin. 2u\sqrt{-1}$$
$$(\cos. u + \sin. u\sqrt{-1})(\cos. 2u + \sin. 2u\sqrt{-1}) = \cos. 3u + \sin. 3u\sqrt{-1}$$
$$(\cos. u + \sin. u\sqrt{-1})(\cos. 3u + \sin. 3u\sqrt{-1}) = \cos. 4u + \sin. 4u\sqrt{-1}$$

on déduit

$$z^3 + \frac{r}{z^3} = 2\cos. 3u, \text{ partant } \cos. 3u = h$$

Soit $A$ le plus petit des angles dont le cosinus est $h$ ; angle qui sera donné par les tables, on aura pour $3u$ les trois valeurs $A$, $2c + A$, $4c + A$, et par conséquent les trois valeurs de $x$ seront, d'après l'équation (3)

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos. \tfrac{1}{3} A$$

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos. \left(\frac{2c + A}{3}\right)$$

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos. \left(\frac{4c + A}{3}\right)$$

En prenant $6c + A$, $8c + A$, etc. pour $3u$, on retomberoit sur les racines déjà trouvées, ce qui doit arriver.

On voit clairement ici, comment l'imaginaire $\sqrt{-1}$ qui, dans le cas irréductible, s'introduit dans les trois racines, disparoît dans l'expression de $r\left(z + \frac{1}{z}\right)$ : la valeur de $z$ exprime le radical imaginaire qui, dans ce cas, entre dans la composition de chacune des racines, et c'est par la comparaison qu'on a fait de ce radical avec $\cos. u \pm \sqrt{-1}. \sin u$ que les racines ont pris une forme à la fois réelle et finie.

Dans le cas de $h = 1$, on a $3u = 0$ et $u = 0$, en sorte que les trois racines deviennent

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\ ;\ x = -\sqrt{\frac{p}{3}}\ ;\ x = -\sqrt{\frac{p}{3}}$$

ou

$$x = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\ ;\ x = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\ ;\ x = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$$

---

Le premier produit est égal à $(\cos. u + \sin. u\sqrt{-1})^2$ ; le second est égal à $(\cos. u + \sin u\sqrt{-1})^3$, et ainsi de suite. Donc, en général, $m$ étant un nombre entier quelconque, on aura

$$(\cos. u + \sin. u\sqrt{-1})^m = \cos. mu + \sin. mu\sqrt{-1}$$

de-là résulte, en prenant $\sqrt{-1}$ avec le signe moins,

$$(\cos. u - \sin. u\sqrt{-1})^m = \cos. mu - \sin. mu\sqrt{-1}$$

Cette propriété résulteroit encore de la comparaison des séries qui représentent $e^x$, $\sin. x$ et $\cos. x$, comme on le verra dans la suite de ces leçons.

à cause de

$$\frac{q^2}{4} = \frac{p^3}{27}, \text{ d'où } \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = \sqrt{\frac{p}{3}}$$

Lorsqu'abstraction faite du signe, le nombre $h$ est plus grand que l'unité, on doit faire

$$z^3 = tang.\ u \text{ d'où } z^3 + \frac{1}{z^3} = \frac{2}{sin.\ 2u} \text{ et } sin.\ 2u = \frac{1}{h}$$

on aura donc l'angle $u$ par les tables de sinus : si l'on fait ensuite

$$z = \sqrt[3]{tang.\ u} = tang.\ u' \text{ on aura } x = \frac{2\sqrt{\frac{p}{3}}}{sin.\ 2u'}$$

et les deux racines imaginaires seront

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}} \left\{ \alpha\ tang.\ u' + \frac{1}{\alpha\ tang.\ u'} \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{p}{3}} \left\{ \alpha'\ tang.\ u' + \frac{1}{\alpha'\ tang.\ u'} \right\}$$

$\alpha$ et $\alpha'$ étant $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ou les deux dernières racines cubiques de l'unité, et réduisant, on trouvera

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}} \left\{ \frac{-1 \mp cos.\ 2u' \sqrt{-3}}{sin.\ 2u'} \right\}$$

Il reste à considérer le cas ou

$$x = \mp \sqrt{\frac{p}{3}} \left( z - \frac{1}{z} \right)$$

on fera alors

$$\frac{1}{z^3} = tang.u, \text{ d'où } -tang.\ u + \frac{1}{tang.\ u} = 2h \text{ et } tang.\ 2u = \frac{1}{h}$$

on aura donc l'angle $u$ au moyen des tables : soit encore

$$\sqrt[3]{tang.\ u} = tang.\ u'$$

la racine réelle sera

$$x = \frac{2\sqrt{\frac{p}{3}}}{tang.\ 2u'}$$

et prenant $\alpha$ *tang.* $u'$ et $\alpha'$ *tang.* $u'$, $\alpha$ et $\alpha'$ ayant mêmes acceptions que ci-dessus, les deux racines imaginaires seront représentées par

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}} \left\{ \frac{-\cos 2u' \mp \sqrt{-3}}{\sin. 2u'} \right\}$$

Les racines de l'équation du quatrième degré, étant des fonctions très simples de celles de la réduite, on pourra les déterminer facilement par la méthode précédente.

## *Résolution des équations binomes.*

Soit l'équation binome ou à deux termes

$$x^m - a^m = 0 \ldots\ldots (1)$$

si on fait

$$x = ay$$

elle se transformera dans la suivante

$$a^m y^m - a^m = 0 \text{ ou } y^m - 1 = 0 \ldots\ldots (2)$$

la recherche des $m$ valeurs de $x$ dépend donc de la résolution de l'équation (2). On remarquera d'abord que si $m$ est un nombre composé, tel que

$$m = p.q$$

$p$ et $q$ étant des nombres entiers, la résolution de l'équation (2) se réduira à celle de deux équations semblables l'une du degre $p$, l'autre du degré $q$; car faisant

$$y^q = z$$

il viendra

$$y^m = z^p \text{ d'où } z^p - 1 = 0 \ldots\ldots (3)$$

Supposons maintenant qu'on ait résolu cette équation de degré $p$ et que $\alpha$ soit une des racines, on aura ensuite

$$y^q - \alpha = 0$$

ou faisant

$$y = u \sqrt[q]{\alpha}$$

$\sqrt[q]{\alpha}$ étant la racine donnée par l'opération arithmétique, il viendra

$$u^q - 1 = 0 \ldots\ldots (4)$$

en sorte que les équations (3) et (4) résolues donneront les $p.q$ racines de la proposée.

On voit donc que la résolution de l'équation

$$y^m - 1 = 0$$

lorsque $m$ n'est pas un nombre premier, dépend de celle d'autant d'équations semblables que $n$ contient de facteurs simples, les degrés de ces équations étant successivement ces facteurs eux-mêmes.

Considérons, en général, le cas de $n$, nombre impair, en sorte que l'équation à résoudre soit

$$x^{2p+1} + 1 = 0 \ldots\ldots$$

puisque l'unité est toujours une des valeurs de $x$, on pourra diviser le premier membre par $x - 1$ et le quotient sera

$$x^{2p} + x^{2p-1} + x^{2p-2} + x^{2p-3} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0$$

divisant par $x^p$ et rapprochant les termes équidistans de celui du milieu, on aura

$$x^p + \frac{1}{x^p} + x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}} + \ldots\ldots + x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 0$$

Soit

$$x + \frac{1}{x} = z \text{ d'où } x^2 - zx + 1 = 0$$

on obtiendra

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = z^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

d'où résulte

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$$

on aura

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = z^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3z$$

d'où l'on déduit

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = z^3 - 3z$$

On trouveroit de même

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = z^4 - 4z^2 + 2$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = z^5 - 5z^3 + 5z$$

et en général

$$x^r + \frac{1}{x^r} = z^r - rz^{r-2} + \frac{r(r-3)}{2} z^{r-4}$$

$$- \frac{r(r-4)(r-5)}{2.3} z^{r-6} + \text{etc.}$$

en ne continuant la série qu'autant que l'on aura des puissances positives de $z$. Faisant ces substitutions dans l'équation du degré $p$, on aura une transformée en $z$ dans laquelle toutes les puissances de $z$ seront positives, la plus haute étant $= p$, en sorte que cette équation ne sera plus que du degré $p$ : si donc on peut résoudre cette équation, on aura $p$ valeurs à chacune desquelles correspondront deux valeurs de $x$ par la résolution de l'équation,

$$x^2 - zx + 1 = 0$$

et conséquemment $2p$ valeurs de $x$ qui jointes à la première racine $x = 1$, seront les $2p + 1$ racines de la proposée.

Il résulte de ce qui précède qu'on pourra obtenir par l'extraction de la seule racine quarrée les racines des équations

$$x^3 - 1 = 0, x^5 - 1 = 0$$

pour lesquelles on a $p = 1, p = 2$: on pourra donc aussi résoudre toute équation

$$x^m - 1 = 0$$

lorsque $n$ n'aura d'autres facteurs simples que 2, 3 et 5, ou lorsque $n$ sera de la forme $2^\lambda . 3^\mu . 5^\nu$. En admettant la résolution des équations du troisième degré, on pourra résoudre l'équation

$$x^7 - 1 = 0$$

pour laquelle $p = 3$, et conséquemment toute équation $x^m - 1 = 0$ lorsque $m$ sera de la forme $2^\lambda . 3^\mu . 5^\nu . 7^\pi$. Mais la résolution de l'équation

$$x^{11} - 1 = 0$$

pour laquelle $p = 5$ exigeroit celle d'une équation du cinquième degré.

Quoiqu'on ne puisse trouver algébriquement les racines de l'équation

$$x^m - 1 = 0$$

cependant on peut toujours les exprimer au moyen de la

division de la circonférence en $m$ parties égales, quelque soit $m$.

Reprenons le théorême

$$(cos.\ \varphi + sin.\ \varphi \sqrt{-1})^m = cos.\ m\varphi + sin.\ m\varphi . \sqrt{-1}$$

démontré plus haut dans le cas de $m$ nombre entier: faisant dans la proposée

$$x = cos.\ \varphi + sin.\ \varphi . \sqrt{-1} \text{ d'où } x^m = cos.\ m\varphi + sin.\ m\varphi . \sqrt{-1}$$

on aura pour résultat de cette substitution

$$cos.\ m\varphi + sin.\ m\varphi . \sqrt{-1} - 1 = 0$$

équation qui sera satisfaite dans le cas de

$$cos.\ m\varphi = 1 \text{ et } sin.\ m\varphi = 0$$

La dernière condition aura lieu en posant

$$m\varphi = k\pi$$

$\pi$ étant la demi-circonférence et $k$ un nombre entier quelconque: mais comme le cosinus ne devient égal au rayon que lorsque l'arc est un multiple pair de la demi-circonférence, il faut qu'on ait encore

$$k = 2\lambda \text{ donc } m\varphi = 2\lambda\pi \text{ d'où } \varphi = \frac{2\lambda}{m}\pi$$

Toutes les racines de la proposée seront donc comprises dans la formule

$$x = cos.\ \frac{2\lambda}{m}\pi + sin.\ \frac{2\lambda}{m}\pi . \sqrt{-1}$$

et on les obtiendra en faisant successivement $\lambda = 0, = 1,$ = etc. jusqu'à $m - 1$ inclusivement: il seroit inutile de faire $\lambda = m$ ou $\lambda > m$, puisqu'il résulteroit de ces hypothèses les mêmes valeurs que pour $\lambda < m$: en effet, les arcs que l'on obtiendroit seroient les mêmes que les précédens augmentés d'un certain multiple de la circonférence.

Nous remarquerons d'abord que toutes les racines de l'équation

$$x^m - 1 = 0$$

sont inégales entre elles puisque dans la circonférence il n'y a pas deux arcs qui aient à la fois même sinus et même cosinus: de plus il est facile de voir que ces racines seront imaginaires, excepté la première qui répond à $\lambda = 0$, et celle qui est donnée par $\lambda = \frac{m}{2}$, lorsque $m$ est pair, supposition

qui donne $x = -1$ : en effet pour que la partie imaginaire de l'expression de $x$ disparaisse, il faut qu'on ait

$$sin.\ \frac{2\lambda}{m}\ \pi = 0$$

ce qui arrive, 1°. lorsque

$$\frac{2\lambda}{m} = 0 \text{ d'où } \lambda = 0$$

2°. lorsque

$$\frac{2\lambda}{m} = 1 \text{ d'où } \lambda = \frac{m}{2}$$

cette dernière condition ne peut être satisfaite que lorsque $m$ est pair, puisque $\lambda$ doit être un nombre entier. On a dans le premier cas

$$x = cos.\ 0 = 1$$

et dans le second

$$x = cos.\ \pi = -1$$

Lorsqu'on suppose $\lambda > m$, la formule

$$x = cos.\ \frac{2\lambda}{m}\ \pi + sin.\ \frac{2\lambda}{m}\ \pi.\sqrt{-1}$$

devient

$$x = cos.\ (\pi + z) + sin.\ (\pi + z).\sqrt{-1}$$

mais on sait que

$$cos.\ (\pi+z) = cos.\ (\pi - z)\ ;\ sin.\ (\pi+z) = -sin.\ (\pi - z)$$

donc

$$cos.\ (\pi+z)+sin.\ (\pi+z)\sqrt{-1} = cos.(\pi-z)-sin.(\pi-z).\sqrt{-1}$$

or parmi les valeurs de $x$ qui résultent de $\lambda < m$ se trouvent nécessairement celles-ci

$$cos.\ (\pi - z) + sin.\ (\pi - z)\sqrt{-1}$$

donc toutes les valeurs de $x$ sont comprises dans la formule

$$x = cos.\ \frac{2\lambda}{m}\ \pi \pm sin.\ \frac{2\lambda}{m}\ \pi.\sqrt{-1}$$

ce qui résulte encore de ce que $\sqrt{-1}$ emporte le double signe $\pm$.

Soit, pour premier exemple, l'équation

$$x^5 - 1 = 0$$

pour laquelle $m = 5$ : on aura

$$x = cos.\ \frac{2\lambda'}{5}\ \pi \pm sin.\ \frac{2\lambda}{5}\ \pi.\sqrt{-1}$$

et pour $\lambda = 0 \ldots cos.\ \frac{2\lambda}{5}\pi = 1 ; sin.\ \frac{2\lambda}{5}\pi = 0, x = 1$

$$\lambda = 1 \ldots\ldots cos.\ \frac{2\lambda}{5}\pi = cos.\ \frac{2}{5}\pi ; sin.\ \frac{2\lambda}{5}\pi = sin.\ \frac{2}{5}\pi ;$$

$$x = cos.\ \frac{2}{5}\pi \pm sin.\ \frac{2}{5}\pi . \sqrt{-1}$$

$$\lambda = 2 \ldots . cos.\ \frac{2\lambda}{5}\pi = cos.\ \frac{4}{5}\pi ; sin.\ \frac{2\lambda}{5}\pi = sin.\ \frac{4}{5}\pi ;$$

$$x = cos.\ \frac{4}{5}\pi \pm sin.\ \frac{4}{5}\pi . \sqrt{-1}$$

l'hypothèse de $\lambda = 3$ donneroit

$$x = cos.\ \frac{6}{5}\pi \pm sin.\ \frac{6}{5}\pi \sqrt{-1} = cos.\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) \pm sin.\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right)\sqrt{-1}$$

$$= cos.\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) \pm sin.\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)\sqrt{-1} = cos.\ \frac{4}{5}\pi \pm sin.\ \frac{4}{5}\pi . \sqrt{-1}$$

valeurs déjà trouvées dans l'hypothèse de $\lambda = 2$. La supposition de $\lambda = 4$ donneroit

$$x = cos.\ \frac{8}{5}\pi \pm sin.\ \frac{8}{5}\pi . \sqrt{-1} = cos.\left(\pi + \frac{3}{5}\pi\right) \pm sin.\left(\pi + \frac{3}{5}\pi\right)\sqrt{-1}$$

$$= cos.\left(\pi - \frac{3}{5}\pi\right) \pm sin.\left(\pi - \frac{3}{5}\pi\right)\sqrt{-1} = cos\ \frac{2}{5}\pi \pm sin.\ \frac{2}{5}\pi \sqrt{-1}$$

valeurs correspondantes à $\lambda = 1$

Les produits des facteurs correspondants aux racines données par $\lambda = 1$ et par $\lambda = 2$ sont

$$x^2 - 2x\ cos.\ \frac{2}{5}\pi + 1 = x^2 - 2x\ cos.\ 72^\circ + 1$$

$$x^2 - 2x\ cos.\ \frac{4}{5}\pi + 1 = x^2 - 2x\ cos.\ 144^\circ + 1$$

en sorte que

$$x^5 - 1 = (x - 1)\ (x^2 - 2x\ cos.\ 72^\circ + 1)\ (x^2 - 2x\ cos.\ 144^\circ + 1)$$

Soit, pour second exemple, l'équation

$$x^6 - 1 = 0$$

pour laquelle on a $m = 6$ et

$$x = cos.\ \frac{2\lambda}{6}\pi \pm sin.\ \frac{2\lambda}{6}\pi . \sqrt{-1}$$

Pour $\lambda = 0$, on trouve

$$x = cos.\,0^\circ \pm sin.\,0^\circ . \sqrt{-1} = +1$$

$$\lambda = 1 \ldots . x = cos.\,\tfrac{1}{3}\pi \pm sin.\,\tfrac{1}{3}\pi\sqrt{-1} = cos.\,60^\circ . \pm sin.\,60^\circ . \sqrt{-1}$$

$$\lambda = 2 \ldots . x = cos.\,\tfrac{2}{3}\pi \pm sin.\,\tfrac{2}{3}\pi\sqrt{-1} = cos.\,120^\circ \pm sin.\,120^\circ . \sqrt{-1}$$

$$\lambda = 3 \ldots . x = cos.\,\pi \pm sin.\,\pi\sqrt{-1} = -1$$

les facteurs réels du second degré seront donc

$$(x^2-1)(x^2-2x\,cos.\,60^\circ+1)(x^2-2x\,cos.\,120^\circ+1 = x^6-1 = 0)$$

Les racines de l'équation

$$x^m - 1 = 0$$

Pl. A. Fig. se construisent d'une manière fort simple au moyen du cercle : en effet, après avoir divisé la demi-circonférence $ARB$ en un nombre $m$ de parties égales et numéroté toutes ces divisions en commençant par l'extrémité à gauche du diamètre, qui sera zéro, qu'on joigne les numéros pairs, on formera une portion de polygone régulier $AMM'$ etc : si des sommets des angles de ce polygone on abaisse des perpendiculaires sur le diamètre, elles seront $sin.\,\frac{2\lambda}{m}\pi$ et les distances au centre seront $cos.\,\frac{2\lambda}{m}\pi$ : ces perpendiculaires représenteront donc les coefficiens de $\sqrt{-1}$ et les distances au centre donneront la partie réelle des racines. Au point $A$, on a

$$x = cos.\,0 + sin.\,0 . \sqrt{-1} = +1$$

Si $m$ est pair, il y aura en $B$ un point de division de numéro pair, pour lequel

$$x = cos.\,\pi + sin.\,\pi . \sqrt{-1} = -1$$

Maintenant dans le cas de $\frac{m}{2}$ nombre pair, où de $m = 4k$, il y aura en $R$ un point de division de numéro pair, auquel correspondra

$$x = cos.\,\tfrac{\pi}{2} + sin.\,\tfrac{\pi}{2}\sqrt{-1} = +\sqrt{-1}$$

et comme une racine imaginaire de la forme $\alpha + 6\sqrt{-1}$ en suppose une autre telle que $\alpha - 6\sqrt{-1}$, on aura aussi dans ce cas

$$x = -\sqrt{-1}$$

Les

Les racines de l'équation

$$x^m + 1 = 0$$

se construiroient semblablement : mais alors il faudroit joindre les numéros impairs, et il est visible que les arcs ainsi déterminés seront compris dans $\frac{2\lambda+1}{m}\pi$ et que

$$x = cos.\frac{2\lambda+1}{m}\pi \pm sin.\frac{2\lambda+1}{m}\pi.\sqrt{-1}$$

sera la formule générale des racines, ce qui se vérifie en élevant la valeur de $x$ à la puissance $m$ et ajoutant l'unité, car on a

$$x^m + 1 = cos.(2\lambda+1)\pi \pm sin.(2\lambda+1)\pi.\sqrt{-1} + 1 = 0$$

L'équation

$$x^m + 1 = 0$$

n'aura pas de racines réelles dans le cas de $m$ nombre pair, parce que l'extrêmité à droite du diamètre, ou le point $B$, ne peut être le sommet d'un des angles du polygone. Cette conséquence résulte encore de ce que le nombre des racines imaginaires étant toujours pair, il faudroit, dans le cas de $m$ nombre pair, qu'il y eût deux racines réelles, ce qui est impossible, puisque le point $A$ ne peut être le sommet d'un des angles du polygone. Si $\frac{m}{2}$ est impair, un des points de division tombera en $R$, on aura

$$x = cos.\frac{\pi}{2} + sin.\frac{\pi}{2}\sqrt{-1} = +\sqrt{-1}$$

et conséquemment une autre racine

$$x = -\sqrt{-1}$$

Dans le cas de $m$ nombre impair, on verra aisément que l'équation proposée ne peut comporter plus d'une racine réelle qui sera $-1$.

Toutes les racines de l'équation $x^m - 1 = 0$ sont donc comprises dans la formule

$$x = cos.\frac{2\lambda}{m}\pi + sin.\frac{2\lambda}{m}\pi\sqrt{-1}$$

mais

$$cos.\frac{2\lambda}{m}\pi + sin.\frac{2\lambda}{m}\pi.\sqrt{-1} = \left(cos.\frac{2}{m}\pi + sin.\frac{2}{m}\pi.\sqrt{-1}\right)^{\lambda}$$

donc si on suppose

$$cos.\ \frac{2}{m}\pi + sin.\ \frac{2}{m}\pi\sqrt{-1} = \alpha$$

toutes les racines seront réprésentées par les puissances successives $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$, etc. jusqu'à $\alpha^m$ qui est toujours l'unité, ce qui est évident, puisqu'on a

$$\alpha^m - 1 = 0 \text{ d'où } \alpha^m = 1$$

ces racines correspondent aux valeurs $\lambda = 1, = 2, \ldots = m$, hypothèses qu'on peut faire, puisque, comme on l'a vu (page 377), on a la même racine pour $\lambda = 0$ et $\lambda = m$.

Dans le cas de $m$ nombre pair, on a $\alpha^{\frac{m}{2}} = -1$, ainsi qu'on l'a trouvé précédemment

*Toutes les racines de l'équation*

$$x^m - 1 = 0$$

*peuvent être représentées par les puissances* $1^{re}, 2^{me}, m^{me}$ *de l'une quelconque* $\alpha^p$ *de ces racines pourvu que m soit un nombre premier ou que p et m soient des nombres premiers entre eux*. Soit, par exemple, $m = 3$, les racines seront $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$; si l'on prend à la place de $\alpha$ la racine suivante $\alpha^2$, on aura les trois racines $\alpha^2, \alpha^4, \alpha^6$ qui à cause de $\alpha^3 = 1$ deviennent $\alpha^2, \alpha, \alpha^3$ les mêmes que les précédentes. De même, pour $m=5$, les racines seront $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5$ et si au lieu de $\alpha$, on prend $\alpha^2$ qu'on élève aux puissances successives 1, 2, 3, 4 et 5, on aura $\alpha^2, \alpha^4, \alpha^6, \alpha^8, \alpha^{10}$ qui, à cause de $\alpha^5 = 1$, deviennent $\alpha^2, \alpha^4, \alpha, \alpha^3, \alpha^5$ : prenant $\alpha^3$ au lieu de $\alpha$, les racines deviennent $\alpha^3, \alpha^6, \alpha^9, \alpha^{12}, \alpha^{15}$, ou $\alpha^3, \alpha, \alpha^4, \alpha^2, \alpha^5$, et enfin supposant $\alpha^4$ pour $\alpha$, on trouvera $\alpha^4, \alpha^8, \alpha^{12}, \alpha^{16}, \alpha^{20}$, ou $\alpha^4, \alpha^3, \alpha^2, \alpha^1, \alpha^5$ de sorte qu'on retrouvera toujours les mêmes racines, mais dans un ordre différent.

En général, soit $\alpha^p$ l'une quelconque des $m$ racines $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots\ldots \alpha^m$, $p$ étant $< m$ et $m$ un nombre premier : prenant cette racine $\alpha^p$ au lieu de $\alpha$, on aura celles-ci $\alpha^p, \alpha^{2p}, \alpha^{3p} \ldots\ldots \alpha^{mp}$ : or, si après avoir ôté de chacun des exposans $2p, 3p, 4p \ldots\ldots mp$ le plus grand multiple de $m$ qu'il contienne et désigné les restes en nombre $m$ et chacun $< m$ par $p, q, r, s$ etc., d'où résulteront les puissances $\alpha^p, \alpha^q, \alpha^r \ldots\ldots \alpha^m$, on peut prouver que les nombres $p, q, r, s \ldots m$ dont aucun n'est $> m$, sont tous différens entre eux, nécessairement ils ne pourront être que la suite des nombres $1, 2, 3, \ldots\ldots m$ et conséquemment il sera démontré que

les racines $\alpha^p$, $\alpha^q$ ..... $\alpha^m$ sont les mêmes que $\alpha$, $\alpha^2$, $\alpha^3$ .. $\alpha^m$: or, les nombres $p, q, r \ldots\ldots m$ sont tous différens entre eux; car pour que deux de ces nombres $q$ et $s$, par exemple, fussent les mêmes, il faudroit que la différence entre les nombres $4p$ et $2p$ que nous supposons les avoir produits, fût exactement divisible par $m$, ce qui est impossible, lorsque $m$ est un nombre premier; donc les nombres $p, q, r \ldots m$ sont tous différens entre eux et les racines $\alpha^p$, $\alpha^q$, ..... $\alpha^m$ sont les mêmes que les racines $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots\ldots \alpha^m$.

La démonstration précédente conviendra encore dans le cas où $m$ ne seroit pas un nombre premier, pourvu que $p$ et $m$ soient des nombres premiers entre eux.

L'équation

$$x^m - 1 = 0$$

manquant de tous les termes intermédiaires entre le premier et le dernier, les sommes des puissances $1^{re}, 2^{me} \ldots (m-1)^{me}$ des racines seront nulles, d'après les formules démontrées (page 315). La somme des puissances $m$ des racines sera donnée par la formule trouvée (page citée).

$$S_m - AS_{m-1} + BS_{m-2} \ldots\ldots + mV = 0$$

laquelle se réduit à

$$S_m - m = 0 \text{ d'où } S_m = m$$

Les sommes des puissances des racines dont les exposans ne seront pas des multiples de $m$ seront nulles, et celles des puissances des racines dont les exposans seront divisibles par $m$ deviendront égales à $m$, ce qui résulte immédiatement de la formule $T$, donnée (page citée.).

Si dans l'équation

$$x^m - 1 = 0$$

on fait

$$x = \frac{z}{y}$$

on aura la transformée

$$y^m - 1 = 0$$

dont les racines sont $1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}$, etc. ou $1, \alpha^{-1}, \alpha^{-2}$, etc. conséquemment

$$1 + (\alpha)^{-km} + (\alpha^2)^{-km} + (\alpha^3)^{-km} + \ldots\ldots + (\alpha^{m-1})^{-km} = m.$$

et d'après ce qui a été observé plus haut

$$1 + (\alpha)^{-(km+r)} + \text{etc.} = 0$$

c'est-à-dire, que les sommes des puissances négatives des racines de l'équation

$$x^m - 1 = 0$$

se comportent de la même manière que celles des puissances positives des mêmes racines.

On prouveroit de la même manière que les racines de l'équation

$$x^m + 1 = 0$$

jouissent des propriétés

$$S_{mk} = -m;\ S_{km+r} = 0$$

La résolution de l'équation binôme

$$x^m \pm a^m = 0.$$

fournit le moyen de démontrer la propriété du cercle dont l'énoncé est renfermé dans le théorème suivant.

*Si dans un cercle décrit d'un rayon* $= a$, *on mène un diamètre quelconque, qu'à partir d'une des extrémités de ce diamètre, on divise la circonférence en* $2m$ *parties égales, et que l'on désigne par* 0, 1, 2, 3....$m$—1 etc. *ces divisions; en faisant répondre* 0 *à l'origine, si d'un point quelconque pris sur le diamètre ou sur son prolongement, et du même côté du centre que l'origine des arcs, on mène des droites à tous les points de division, le produit de toutes celles menées aux numéros impairs est égal à la somme des puissances m du rayon et de la distance du point fixé au centre; celui de toutes les droites menées aux numéros pairs est égale à la différence des mêmes puissances.*

Pl. A Fig. 4. Du point $M'$, si on abaisse la perpendiculaire $M'P$, on aura

$$\overline{OM'}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM'}^2$$

mais $M'P$ représente le sinus de l'arc $MM'$ dans le cercle pour le rayon $= a$, et $CP$ en est le cosinus; on aura donc en prenant les sinus et cosinus tabulaires calculés pour un rayon égal à l'unité

$$PM' = a \sin. MM'$$

$$CP = a \cos. MM'$$

d'ailleurs représentant $OC$ par $x$, on a

$$OP = x - CP = x - a \cos. MM'$$

et $OM'^2 = x^2 - 2ax \cos. MM' + a^2 \cos.^2 MM' + a^2 \sin.^2 MM'$

$$= x^2 - 2ax \cos. MM' + a^2$$

Les valeurs de $\overline{OM''}^2$, $\overline{OM'''}^2$ etc. s'obtiendront en substituant dans celle qu'on a trouvée pour $OM'$ les arcs $MM''$, $MM'''$ etc. à l'arc $MM'$. Si on ne prend que les arcs qui répondent aux numéros pairs et qu'on désigne toujours par $\pi$ la demi-circonférence, on aura

$$MM'' = \frac{2\pi}{m}, \; MM^{IV} = \frac{4\pi}{m}, \text{ etc.}$$

d'où

$$\overline{OM''}^2 = x^2 - 2ax \cos. \frac{2\pi}{m} + a^2$$

$$\overline{OM^{IV}}^2 = x^2 - 2ax \cos. \frac{4\pi}{m} + a^2$$

mais les lignes $OM''$, $OM^{IV}$ etc. ont leurs correspondantes $Om''$, $Om^{IV}$ etc. placées de l'autre côté du diamètre, qui leur sont respectivement égales, en sorte qu'on pourra écrire $OM'' \times Om''$ au lieu de $\overline{OM''}^2$ etc. : on remarquera en même temps que $OM = x - a$. Cela posé, on a vu (page 379) que les facteurs de l'équation

$$x^m - a^m = 0$$

$m$ étant impair, sont

$$(x-a), \left(x^2 - 2ax \cos. \frac{2\pi}{m} + a^2\right), \left(x^2 - 2ax \cos. \frac{4\pi}{m} + a^2\right) \text{ etc.}$$

ce qui donne

$$x^m - a^m = (x-a)\left(x^2 - 2ax \cos. \frac{2\pi}{m} + a^2\right)\left(x^2 - 2ax \cos. \frac{4\pi}{m} + a^2\right)$$

etc.

$$= OM \times OM'' \times OM^{IV} + OM^{VI} \text{ etc. } Om'' \times Om^{IV} \times Om^{VI} \text{ etc.}$$

Dans le cas de $m$, nombre pair, parmi toutes les lignes menées du point $O$ aux numéros pairs, se trouveront les

lignes $OM$ et $OB$ qui correspondent aux deux extrémités du diamètre.

Les arcs qui aboutissent aux divisions impaires, étant égaux à $\frac{2\pi}{2m} = \frac{\pi}{m}$, $\frac{6\pi}{2m} = \frac{3\pi}{m}$ etc. on trouvera

$$\overline{OM'}^2 = x^2 - 2ax\cos.\frac{\pi}{m} + a^2$$

$$\overline{OM'''}^2 = x^2 - 2ax\cos.\frac{3\pi}{m} + a^2$$

$$\overline{OM^v}^2 = x^2 - 2ax\cos.\frac{5\pi}{m} + a^2$$

Mais dans le cas de $m$ nombre impair

$$x^m + a^m = (x+a)(x^2 - 2ax\cos.\frac{\pi}{m} + a^2)(x^2 - 2ax\cos.\frac{3\pi}{m} + a^2)\text{etc.}$$

substituant donc les valeurs, et observant que $OB = x + a$, on aura

$$x^m + a^m = OB \times OM' \times OM''' \times OM^v \text{etc.} \times Om' + Om''' \times Om^v \text{etc}$$

Dans le cas de $m$, nombre pair, les extrémités $M$ et $B$ du diamètre porteront des numéros pairs, en sorte que la ligne $OB$ n'entrera plus en facteur.

D'où résulte encore cette propriété dans le cas de $m$ *O à toutes les divisions paires et impaires, en y comprenant celles qui aboutissent aux deux extrémités du diamètre, sera*

$$(x^m - 1)(x^m + 1) = x^{2m} - 1 = 0$$

Les équations de la forme

$$x^{2m} - 2px^m + q = 0$$

peuvent être traitées comme celles qui ne renferment que deux termes : en résolvant la précédente à la manière du second degré, on en tire

$$x^m = p \pm \sqrt{p^2 - q}.$$

Tant que $p^2$ sera plus grand que $q$, les valeurs de $x^m$ seront réelles, et les représentant par $\alpha$ et $\zeta$ on aura les deux équations

$$x^m - \alpha = 0$$

$$x^m - \zeta = 0$$

dont on sait trouver les racines d'après ce qui précède.

Lorsqu'on aura $p^2 < q$, les valeurs de $x^m$ seront imaginaires, et on leur donnera la forme

$$x^m = p \pm \sqrt{-1}\sqrt{q-p^2}$$

et faisant

$$p = a, \sqrt{q-p^2} = b$$

on aura

$$x^m = a \pm b\sqrt{-1}$$

et il ne s'agira plus que d'extraire une racine du degré $m$ de l'expression

$$a \pm b\sqrt{-1}$$

Comme on ne peut supposer en général

$$a \pm b\sqrt{-1} = cos.\varphi \pm sin.\varphi\sqrt{-1}$$

parce qu'on n'a pas, en général

$$a^2 + b^2 = 1$$

on fera

$$a = k\,cos.\varphi,\quad b = k\,sin.\varphi$$

d'où

$$a^2 = k^2\,cos.^2\varphi,\quad b^2 = k^2\,sin.^2\varphi$$

et conséquemment

$$a^2 + b^2 = k^2 \text{ et } k = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{q}$$

donc

$$cos.\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{p}{\sqrt{q}},\quad sin.\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{q-p^2}}{\sqrt{q}}$$

en sorte que

$$a \pm b\sqrt{-1} = k(cos.\varphi \pm sin.\varphi\sqrt{-1})$$

mais comme les arcs $\varphi, \varphi + 2\pi, \varphi + 4\pi \ldots\ldots \varphi + 2n\pi$, $n$ étant un nombre entier quelconque, ont même sinus et même cosinus, on aura

$$x^m = k\left\{cos.(\varphi + 2n\pi) \pm sin.(\varphi + 2n\pi)\sqrt{-1}\right\}$$

$$x = k^{\frac{1}{m}}\left\{cos.\left(\frac{\varphi+2n\pi}{m}\right) \pm sin.\left(\frac{\varphi+2n\pi}{m}\right)\sqrt{-1}\right\}$$

expression générale de la racine cherchée : en faisant successivement $n=0$, $n=1$, $n=2$ etc., on en tire

$$x^{I} = k^{\frac{1}{m}}\left\{cos.\,\frac{\varphi}{m} \pm sin.\,\frac{\varphi}{m}\sqrt{-1}\right\}$$

$$x^{II} = k^{\frac{1}{m}}\left\{cos.\,\frac{\varphi+2\pi}{m} \pm sin.\,\frac{\varphi+2\pi}{m}\sqrt{-1}\right\}$$

$$x^{III} = k^{\frac{1}{m}}\left\{cos.\,\frac{\varphi+4\pi}{m} \pm sin.\,\frac{\varphi+4\pi}{m}\sqrt{-1}\right\}$$

Le nombre de ces racines ne peut aller au-delà de $m$, car en faisant $n=m$, $n=m+1$, on retrouve les racines correspondantes à $m=0$, $m=1$ etc. Si l'on multiplie l'un par l'autre les facteurs simples.

$$x - k^{\frac{1}{m}}\left\{cos.\left(\frac{\varphi+2n\pi}{m}\right) + sin.\left(\frac{\varphi+2n\pi}{m}\right)\sqrt{-1}\right\}$$

$$x - k^{\frac{1}{m}}\left\{cos.\left(\frac{\varphi+2n\pi}{m}\right) - sin.\left(\frac{\varphi+2n\pi}{m}\right)\sqrt{-1}\right\}$$

le produit $x^2 - 2k^{\frac{1}{m}}\,cos.\left(\frac{\varphi+2n\pi}{m}\right) + k^{\frac{2}{m}}$ représentera tous les facteurs du second degré de la proposée.

La résolution de l'équation

$$x^{2m} - 2px^m + q = 0$$

renferme la démonstration du théorême de *Moivre*, qui comprend celui de *Cotes* comme cas particulier. En voici l'énoncé.

Pl. A Fig. 5. *Si on partage un arc AG en un nombre m de parties égales chacune à AM, et qu'à partir du point M, on divise la circonférence en autant de parties égales que AM est contenu de fois dans AG, et qu'en suite d'un point quelconque O pris sur le diamètre ou sur son prolongement, on mène les lignes OM, O1, O2, etc., à tous les points de division, le produit des quarrés de ces lignes sera égal à*

$$x^{2m} - 2x^m\,cos.\,\varphi + 1$$

en nommant $\varphi$ l'arc $AG$, $x$ la ligne qui joint le point $O$ et le centre du cercle, et supposant le rayon égal à l'unité.

Soit

$$m = 4$$

ce qui donnera les quatre lignes $OM$, $O1$, $O2$, $O3$, on aura

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{MP}^2 = (x - \overline{CP}^2) + \overline{MP}^2 =$$

$$x^2 - 2x\cos.\frac{\varphi}{4} + \cos.^2\frac{\varphi}{4} + \sin.^2\frac{\varphi}{4} = x^2 - 2x\cos.\frac{\varphi}{4} + 1$$

$$\overline{O1}^2 = \left\{x - \cos.\left(\frac{\varphi+2\pi}{4}\right)\right\}^2 + \sin.^2\left(\frac{\varphi+2\pi}{4}\right)$$

$$= x^2 - 2x\cos.\left(\frac{\varphi+2\pi}{4}\right) + 1$$

$$\overline{O2}^2 = \left\{x - \cos.\left(\frac{\varphi+4\pi}{4}\right)\right\}^2 + \sin.^2\left(\frac{\varphi+4\pi}{4}\right)$$

$$= x^2 - 2x\cos.\left(\frac{\varphi+4\pi}{4}\right) + 1$$

$$O3 = \left\{x - \cos.\left(\frac{\varphi+6\pi}{4}\right)\right\}^2 + \sin.^2\left(\frac{\varphi+6\pi}{4}\right)$$

$$= x^2 - 2x\cos.\left(\frac{\varphi+6\pi}{4}\right) + 1.$$

mais la résolution de l'équation $x^8 - 2x^4\cos.\varphi + 1 = 0$, donne

$$x^8 - 2x^4\cos\varphi + 1 = \left\{x^2 - 2x\cos\frac{\varphi}{4} + 1\right\}\left\{x^2 - 2x\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{4}\right) + 1\right\}$$

$$\left\{x^2 - 2x\cos\left(\frac{\varphi+4\pi}{4}\right) + 1\right\}\left\{x^2 - 2x\cos\left(\frac{\varphi+6\pi}{4}\right) + 1\right\}$$

en observant qu'alors $k = 1$; d'où on conclut

$$\overline{OM}^2 \times \overline{O1}^2 \times \overline{O2}^2 \times \overline{O3}^2 = x^8 - 2x^4\cos.\varphi + 1$$

Si $\varphi = \pi$, alors $\cos.\varphi = -1$

et l'équation

$$x^8 - 2x^4\cos.\varphi + 1 = 0$$

se change dans la suivante

$$x^8 + 2x^4 + 1 = 0$$

et extrayant la racine quarrée

$$x^4 + 1 = 0$$

ce qui fait voir que le théorême de *Moivre* contient celui de *Cotes*.

## *De la résolution des équations littérales.*

Soit l'équation

$$\left.\begin{array}{r} x^3 - acb^2x^2 - a^6b^2 \\ +a^5b^6 \\ +cd^3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + a^8b^4 = 0 \ldots\ldots (1). \\ +a^7b^5 \\ -2a^4b^3c \end{array}\right.$$

dont on demande les racines finies, si elles sont commensurables, et ensuite infinies, si elles sont incommensurables.

D'abord on supposera $x = a^m$, et si on est tombé sur une racine de l'équation, nécessairement après avoir ordonné le résultat par rapport aux puissances successives de la lettre $a$, les coefficients de ces puissances seront égaux à zéro; mais on conçoit que pour qu'une telle réduction ait lieu, il faut que la puissance $m$ de $a$, soit telle qu'il n'y ait pas dans le résultat de la substitution, un terme unique de plus haut exposant de la lettre $a$, parce que ce terme ne pouvant se réduire avec aucun autre, sa destruction seroit impossible. Soit d'abord, par rapport à la proposée, $x = a^{10}$, et on aura cette ligne des plus grands exposants de la lettre $a$

$$a^{30}, a^{21}, a^{16}, a^8$$

cette supposition n'est pas admissible, parce que $a^{30}$ est le seul terme de son espèce.

$x = a^5$ donne $a^{15}, a^{12}, a^{11}, a^8$

$x = a^4 \ldots\ldots a^{12}, a^9, a^{10}, a^8$

hypothèses qui doivent être rejettées, parce que les termes $a^{15}$ et $a^{12}$ ne se trouvent pas répétés. Soit enfin $x = a^3$ d'où résulte pour la ligne des plus grands exposants,

$$a^9, a^7, a^9, a^8$$

supposition admissible, puisqu'elle fournit deux termes qui renferment la plus haute puissance de la lettre $a$, et qu'ainsi les termes de $a^9$ peuvent se détruire. Ces deux

termes sont

$$a^9 - b^2 a^9$$

or si l'on eut supposé

$$x = k a^3$$

$k$ étant une indéterminée, la condition

$$k^3 a^9 - k b^2 a^9 = 0$$

auroit donné

$$k = \pm b$$

donc $\pm b a^3$ est le premier terme de deux des racines de l'équation proposée. Soit $x = a^2$, ce qui donne pour la ligne des plus hauts exposants de $a$

$$a^6, \quad a^5, \quad a^3, \quad a^2$$

et faisant, comme dans l'exemple précédent, $\ldots = k a^2$, les deux termes de $a^3$ seront

$$-k b^2 a^3 + b^4 a^3 = 0 \text{ d'où } k = b^2$$

donc $a^2 b^2$ est le premier terme d'une troisième racine de l'équation proposée. Toute autre supposition seroit à rejeter, en sorte qu'on ne trouveroit que trois racines, ce qui doit arriver, puisque la proposée n'est que du troisième degré. Nous verrons bientôt comment on trouveroit les termes subséquens des trois séries qui expriment les trois racines.

Soit, en général, l'équation

$$\left.\begin{matrix} a^n \\ +\text{etc.} \end{matrix}\right\} x^m + \left.\begin{matrix} a^{n'} \\ +\text{etc.} \end{matrix}\right\} x^{m'} + \left.\begin{matrix} a^{n''} \\ +\text{etc.} \end{matrix}\right\} x^{m''} + \left.\begin{matrix} a^{n'''} \\ +\text{etc.} \end{matrix}\right\} x^{m'''} + \text{etc.} = 0$$

la ligne inférieure contenant les termes sous-ordonnés, par rapport à la lettre $a$ : on demande quelle puissance de la lettre $a$ il faut substituer à la place de l'inconnue $x$ pour que deux termes aient la même plus haute puissance de la lettre $a$. Si l'on suppose

$$x = a^e$$

la proposée deviendra

$$a^{n+me} + a^{n'+m'e} + a^{n''+m''e} \text{ etc.} = 0$$

$$+\text{etc.} \quad +\text{etc.} \quad +\text{etc.}$$

Considérons deux exposans quelconques, par exemple, $n + me$ et $n' + m'e$ : suivant qu'on aura

$$n+me > \text{ou} = \text{ou} < n'+m'e$$

on aura aussi

$$e > \text{ou} = \text{ou} < \frac{n'-n}{m-m'}$$

Pl. A Fig. 5 et 6. Soient maintenant $Am=m$, $Am'=m'$, $mn=n$, $m'n'=n'$ et menons une ligne $NM$ qui fasse avec l'axe des abscisses un angle dont la tangente trigonométrique $=e$ : si cette ligne marchant parallèlement à elle même, jusqu'à rencontrer le point $n$, laisse le point $n'$ en dessous, alors on aura

$$e > \frac{n'-n}{m-m'} \text{ ou } n+me > n'+m'e$$

Si cette parallèle à $MN$ passant par $n$, laisse le point $n'$ en dessus, on en conclura

$$e < \frac{n'-n}{m-m'} \text{ d'où } n+me < n'+m'e$$

Si la parallèle rencontre les points $n$ et $n'$, en même-temps, la substitution $x=a^e$ donnera deux termes de plus grands exposans égaux.

Généralisant le procédé, prenons pour abscisses les exposans de $x$, et pour ordonnées correspondantes, les plus hauts exposants de $a$ dans chaque coefficient des puissances successives de $x$. Si on veut avoir deux termes qui renferment la même plus haute puissance de $a$, il faudra incliner la ligne passant par $n$, jusqu'à ce qu'elle rencontre un autre point situé de telle manière qu'elle laisse tous les Pl. A Fig. 7 autres en de-ça, par rapport à l'axe des abscisses : alors la tangente de cette inclinaison, sera la puissance cherchée de la lettre $a$ : on obtiendra donc le premier terme d'une des racines, en égalant à zéro les deux termes correspondans de l'équation, et tirant de là la valeur de $x$ en $a$. Par exemple dans l'équation (1), on auroit

$$Am=m=3, mn=n=0, Am'=m'=2, m'n'=n'=1,$$

$$Am''=m''=1, m''n''=n''=6, Am'''=m'''=0, m'''n'''=n'''=8$$

les points $n'$ et $n'''$ doivent rester au-dessous de la ligne $mn''$, parce que des proportions.

$$\left.\begin{array}{l} mm'' : mm' :: m''n'' : y \\ mm'' : mm''' :: m''n'' : z \end{array}\right\} \text{ on déduit } \left\{\begin{array}{l} y=3>m'n' \\ z=9>m'''n''' \end{array}\right.$$

donc il faut égaler à zéro la somme des deux termes qui contiennent $a$ avec les exposans $n = 0$ et $n'' = 6$, ce qui donne

$$x^3 - a^6 b^2 x = 0 \text{ d'où } x = \pm a^3 b$$

comme on l'a trouvé plus haut; d'ailleurs on auroit la tangente trigonométrique.

$$e = \frac{n''}{m - m''} = \frac{6}{3-1} = 3, \text{ donc } a^e = a^3$$

Pour obtenir une autre valeur de $e$, on inclinera la ligne passant par le point $n''$, jusqu'à ce qu'elle rencontre un autre point, en sorte que dans cette position, elle n'en laisse aucun au-dessus d'elle, et s'il arrive qu'alors elle passe par trois points, on égalera à zéro la somme des termes correspondans, ce qui donnera les premiers termes d'autres racines, et ainsi de suite à l'égard de tous les points qui se trouveront sur le perimètre de ce polygone. Dans l'équation proposée, comme le point $n'''$ est le seul à la gauche de $n''$ on égalera à zéro la somme des deux termes correspondans ou de ceux dans lesquels la lettre $a$ est affectée des exposants $n'' = 6$ et $n''' = 8$, et qui sont

$$- a^6 b^2 x + a^8 b^4 = 0 \text{ d'où } x = a^2 b^2$$

ainsi qu'il résulte de la première méthode. On trouveroit pour ce cas

$$e = \frac{4}{2} = 2, \text{ d'où } a^e = a^2$$

substitution déjà connue.

Il est aisé maintenant de se rendre raison de la règle suivante, donnée par *Newton*, dans son arithmétique universelle.

Pour résoudre une équation littérale, on mènera, à angle droit, deux lignes $AX$, $AY$ qu'on partagera en autant de parties égales, qu'il y a d'unités dans les plus hautes puissances de $x$ et de $y$ que nous prendrons ici pour $a$, puis après avoir coordonné tous les termes de l'équation proposée horizontalement, par rapport aux puissances de $x$, et verticalement par rapport à celles de $y$, on placera tous les termes qui sont en tête des colonnes verticales, dans les cases de même $x$ et de même $y$, et au moyen d'une règle, on trouvera, sur le champ, tous les termes des équa- Pl. A Fig. 8.

tions partielles, qui fournissent les premiers termes des racines. Faisant une application de ce procédé à l'équation (1), dans laquelle on changera $a$ en $y$, on trouvera que les lignes qui passent par les cases $y^0x^3$ et $y^6x$, $y^6x$ et $x^0y^8$, laissent tous les autres termes en-dessous, et on doit poser

$$\left.\begin{array}{r} x^3 - b^2\ y^6\ x = 0 \\ -b^2 y^6\ x + b^4 y^8 = 0 \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} x = \pm\, b y^3 \\ x = \quad b y^2 \end{array}\right.$$

résultats obtenu précédemment.

Reprenons la formule

$$e = \frac{n' - m}{m - m'}$$

et posons l'équation

$$\begin{array}{ccccccc} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{3} & \frac{6}{4} & \frac{7}{5} & \\ a x^5 + 2a^2 x^4 & \left.\begin{array}{r} -4a^3 \\ -3a^2 \end{array}\right\} & x^3 & \left.\begin{array}{r} +7a^4 \\ +2bc^3a \end{array}\right\} & x^2 & \left.\begin{array}{r} -8a^7 \\ -3bca^2 \end{array}\right\} & \left.\begin{array}{r} x + a^8 \\ -ba^7 \\ +ca^5 \end{array}\right\} = 0 \end{array}$$

comparant le premier terme avec chacun des suivants, on formera la suite des valeurs de $e$, en divisant la différence entre l'exposant de $a$, dans le second terme comparé, et celui de la même lettre dans le premier terme, par la différence prise en sens contraire, entre les exposans de $x$, ce qui donnera la suite des fractions qu'on voit au-dessus de la première ligne horizontale de la proposée (on doit faire abstraction des autres termes qui ne sont que sous-ordonnés). Les plus grandes valeurs de $e$, correspondent donc aux termes $-8a^7x$ et $a^8$, ce qui veut dire que les extrémités du premier côté du polygone répondront aux termes $ax^5$ et $-8a^7x$, et que celles du second côté aboutiront aux termes $-8a^7x$ et $a^8$, en sorte qu'on doit poser les deux équations.

$$\left.\begin{array}{r} ax^5 - 8a^7x = 0 \\ -8a^7x + a^8 = 0 \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} x = a^{\frac{3}{2}} \sqrt[4]{8} \\ x = \frac{a}{8} \end{array}\right.$$

et comme $\sqrt[4]{8}$ admet quatre valeurs, on aura de cette manière les premiers termes des cinq racines de la proposée.

Nous procéderons à la recherche de quelques termes des racines de l'équation

$$my^3 - x^{\frac{3}{2}} y - m x^{\frac{3}{3}} = 0$$

résolue par rapport à $y$. En appliquant la règle donnée ci-dessus, on trouve

$$\left.\begin{matrix} my^3 - x^3 y = 0 \\ x^3 y + mx^3 = 0 \end{matrix}\right\} \text{ donc } \left\{\begin{matrix} y = \pm m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \text{etc.} \\ y = -m + \text{etc.} \end{matrix}\right.$$

Pour avoir les seconds termes, on supposera

$$y = + m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + z$$

cette valeur substituée dans la proposée, donne, toutes réductions faites

$$mz^{\frac{3}{2}} + 3m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} z^2 + 2x^3 z - mx^{\frac{3}{3}} = 0 \ldots\ldots (A)$$

d'où on déduit

$$mz^{\frac{3}{2}} + 3m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} z + 2x^3 = 0 \ldots\ldots (B)$$

$$2x^3 z - m x^3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (B')$$

$(B)$ donne

$$z = -m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} \text{ et } z = -2m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$$

valeurs à rejetter, parce que l'une substituée pour $z$ dans $y$, donneroit zéro, et l'autre rendroit le premier terme de la seconde racine : on tire de $(B')$

$$z = + \frac{m}{2}$$

second terme de la première racine.

La substitution dans la proposée de

$$y = z - m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$$

donneroit pour transformée en $z$

$$mz^{\frac{3}{2}} - 3m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} z^2 + 2x^3 z - mx^{\frac{3}{3}} = 0 \ldots\ldots (C)$$

et d'après la règle

$$mz^2 - 3m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} z + 2x^3 = 0 \ldots\ldots (D)$$
$$2x^3 z - mx^3 = 0 \ldots\ldots\ldots (D')$$

d'où résultent

$$z = +2m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}, \quad z = +\tfrac{1}{2} m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$$

valeurs à rejetter de la seconde racine : on auroit ensuite

$$z = +\frac{m}{2}$$

On connoît donc déjà les deux seconds termes des deux premières racines. Faisant ensuite dans l'équation donnée

$$y = -m + z$$

et elle deviendra

$$mz^3 - 3m^{\frac{1}{2}} z^{\frac{3}{2}} - x^3 \left.\begin{matrix} \\ \\ +3m^{\frac{1}{2}} \end{matrix}\right\} z - m^4 = 0 \ldots\ldots (E)$$

et appliquant la règle, on trouve

$$\left.\begin{matrix} mz^3 - x^3 z = 0 \\ x^3 z + m^4 = 0 \end{matrix}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{matrix} z = \pm m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} \text{ valeurs à rejetter} \\ z = -\frac{m^4}{x^3} \end{matrix}\right.$$

Nous avons donc déjà trouvé

$$y = m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{m}{2} + \text{etc.}$$
$$y = -m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{m}{2} + \text{etc.}$$
$$y = -m - \frac{m^4}{x^3} + \text{etc.}$$

Nous procéderons maintenant à la recherche des troisièmes termes et, à cet effet, nous ferons dans $(A)$

$$z = \frac{m}{2} + u$$

ce qui donnera

$$mu^3 + 3m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2} m^2 \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} u^2 + 2x^3 + 3m^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} m^3 \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} u + \frac{3}{4} m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{m^4}{8} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} = 0$$

donc,

donc, d'après la règle, on aura les deux équations

$$mu^2 + 3m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}u + 2x^3 = 0$$

$$2x^3u + \tfrac{3}{4}m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = 0 \text{ d'où } u = -\tfrac{3}{8}m^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}$$

la première équation devant être rejettée parce qu'elle est la même que (*B*). Pour trouver le troisième terme de la seconde racine, faisons la même substitution pour $z$ dans l'équation (*C*) qui donnera

$$\left.\begin{array}{l} mu^3 - 3m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} \\ \quad + \tfrac{3}{2}m^2 \end{array}\right\} u^2 + 2x^3 \left.\begin{array}{l} \\ - 3m^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{3}{2}} \\ + \tfrac{3}{4}m^3 \end{array}\right\} u - \tfrac{3}{4}m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = 0 \left.\begin{array}{l} \\ \\ + \frac{m^6}{8} \end{array}\right.$$

de laquelle on tire les deux suivantes

$$mu^2 - 3m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}u + 2x^3 = 0$$

$$2x^3u - \tfrac{3}{4}m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = 0$$

La première répète l'équation (*D*) et la seconde donne

$$u = \tfrac{3}{8}m^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}$$

Passons enfin à la recherche du troisième terme de la troisième racine et pour le trouver, faisons dans (*E*)

$$x = u - \frac{m^6}{x^3}$$

on parviendra aux deux équations

$$\left.\begin{array}{l} mu^2 - x^3 = 0 \\ x^3u + 3m^7x^3 = 0 \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} u = m^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} \text{ valeur déjà trouvée} \\ u = -\dfrac{3m^7}{x^6} \end{array}\right.$$

en sorte qu'on aura

$$y = m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{m}{2} - \frac{3}{8} m^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} + \text{etc.}$$

$$y = -m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{m}{2} + \frac{3}{8} m^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} + \text{etc.}$$

$$y = -m - \frac{m^4}{x^3} - \frac{3m^7}{x^6} - \text{etc.}$$

En continuant de cette manière, on trouvera, sans peine, autant qu'on voudra de termes suivans. On remarquera que les équations qui fournissent les valeurs de $z$, $u$, etc. doivent toujours être du premier degré; car, autrement, elles donneroient plus de racines que n'en comporte la proposée.

## *Développemens en séries des quantités exponentielle, logarithmique et trigonométriques.*

Soit l'exponentielle $a^x$ à développer en une série procédant suivant les puissances de $x$; je décompose $a^x$ ainsi qu'il suit

$$a^x = \{1 + (a-1)\}^x$$

d'où

$$\{1 + (a-1)\}^x = 1 + x(a-1) + \frac{x(x-1)}{1.2}(a-1)^2 + \frac{x.(x-1)(x-2)}{1.2.3}(a-1)^3 + \text{etc.}$$

et ordonnant par rapport à $x$

$$a^x = 1 + x\left\{(a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \text{etc.}\right\} + x^2\left\{\quad\right\} + x^3\left\{\quad\right\} + \text{etc.}\ldots\ldots(B)$$

d'où l'on voit que l'exponentielle $a^x$ peut très-légitimement être supposée égale à une série procédant suivant les puissances de $x$.

Soit donc

$$a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \text{etc.}$$

Pour évaluer les indéterminées $B$, $C$, $D$, etc., on partira de cette propriété dont jouit l'exponentielle $a^x$ de donner des

résultats identiques soit qu'on l'élève au carré, ou qu'on fasse $x = 2x$ : dans le premier cas on a

$$a^{2x} = 1 + 2Ax + 4Bx^2 + 8Cx^3 + 16Dx^4 + 32Ex^5 \text{ etc.}$$

et dans le second

$$a^{2x} = 1 + \left.\begin{matrix} 2A \\ +A^2 \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} 2B \\ +2AB \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 2C \\ +2AC \\ +B^2 \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} 2D \\ +2AD \\ +2BC \end{matrix}\right\} x^4 + \left.\begin{matrix} 2E \\ \end{matrix}\right\} x^5 + \text{etc.}$$

Egalant les coefficiens des mêmes puissances de $x$ dans les deux membres de l'identité précédente, on trouvera

$$B = \frac{1}{2}A^2$$

$$C = \frac{1}{2.3}A^3$$

$$D = \frac{1}{2.3.4}A^4$$

$$E = \frac{1}{2.3.4.5}A^5$$

etc.

donc

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^3x^3}{2.3} + \frac{A^4x^4}{2.3.4} + \frac{A^5x^5}{2.3..5} + \text{etc.....}(C)$$

$A$ étant le coefficient de $x$, on a d'après la série $(B)$

$$A = (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \text{etc} \ldots (D)$$

et faisant $x = 1$ dans $(C)$, il vient

$$a = 1 + A + \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3}{1.2.3} + \frac{A^4}{1.2.3.4} + \frac{A^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.....}(E)$$

Les séries $(D)$ et $(E)$ démontrent qu'il existe entre $a$ et le nombre $A$ une telle relation que l'une de ces quantités étant donnée, on peut toujours trouver l'autre.

Soit $e$ la valeur numérique de $a$ lorsque $A = 1$, on aura

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \text{etc.....}(F)$$

et

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \text{etc.} \ldots (G)$$

Ce nombre $e$ n'est autre chose que le nombre $B+1$ trouvé page 229. En évaluant la série $(F)$, on trou e

$$e=2,71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 028, \text{ etc.}$$

Si dans la série $(G)$ on fait $x=A$, on obtiendra la suivante

$$e^A=1+A+\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{2.3}+\frac{A^4}{2.3.4}+\frac{A^5}{2.3.4.5}+\text{etc.}\ .\ .\ .\ (H)$$

laquelle n'est autre chose que la série $(E)$.

On a donc entre la base quelconque $a$, la base particulière $e$ et le nombre $A$ cette relation

$$eA=a, \text{ d'où } a^{\frac{1}{A}}=e$$

Si on prend de part et d'autre les logarithmes pour la base $a$, on aura

$$\frac{1}{A}=log.e, \text{ d'où } A=\frac{1}{log.e}$$

Si ces logarithmes sont pris dans le système dont la base est $e$, employant un autre caractéristique $l$ pour les représenter, on aura

$$\frac{1}{A}la=1, \text{ d'où } A=la$$

parce que le logarithme de la base est toujours l'unité : on se rappellera donc que $la$ est le logarithme de la base $a$, rapporté au systeme des logarithmes de *Neper*, qu'on nomme communément logarithmes *naturels* ou *hyperboliques*. Lorsque $a$ devient $e$, on a

$$A=1$$

Faisons successivement $a=1+b$, $a=1-b$, et mettons pour $A$ sa valeur dans

$$A=l.a$$

on aura

$$l(1+b)=b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}+\text{etc.}$$

$$l(1-b)=-b-\frac{b^2}{2}-\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}-\text{etc.}$$

et retranchant le second développement du premier, il vient

$$l\left(\frac{1+b}{1-b}\right)=2\left\{b+\frac{b^3}{3}+\frac{b^5}{5}+\frac{b^7}{7}+\text{etc.}\right\}$$

Pour rendre cette série convergente, on fera

$$\frac{1+b}{1-b} = 1 + \frac{u}{n} \text{ d'où } b = \frac{u}{2n+u}$$

et conséquemment

$$l\left(1+\frac{u}{n}\right) = 2\left\{\frac{u}{2n+u} + \frac{1}{3}\left(\frac{u}{2n+u}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{u}{2n+u}\right)^5 + \text{etc.}\right\}$$

mais réduisant $1 + \frac{u}{n}$ au dénominateur $n$, on trouve

$$l\left(1+\frac{u}{n}\right) = l\left(\frac{n+u}{n}\right) = l(n+u) - l.n$$

donc faisant $u = 1$, il viendra

$$l(n+1) = ln + 2\left\{\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5 + \text{etc.}\right\}$$

série d'autant plus convergente que le nombre $n$ sera plus grand; les logarithmes qu'on en déduira seront rapportés à la base $e$. Si dans la serie précédente on fait $n=4$, puis $n=1$, on aura

$$l.5 = l.4 + 2\left\{\frac{1}{9} + \frac{1}{3(9)^3} + \frac{1}{5(9)^5} + \text{etc.}\right\}$$

$$l.2 = 2\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{3(3)^3} + \frac{1}{5(3)^5} + \text{etc.}\right\}$$

et on trouvera

$$l.10 = 2,30258\ 50929\ 94045\ 68402 \text{ etc.}$$

et $$\frac{1}{l.10} = 0,43429\ 44819\ 03251\ 82765 \text{ etc.}$$

Il nous reste à ramener les logarithmes hyperboliques, c'est-à-dire, ceux du système dont la base est $e$, aux logarithmes *tabulaires* qui répondent à la base $a = 10$. Soient, à cet effet, les deux équations

$$a^p = n,\ e^q = n \text{ d'où } a^p = e^q$$

prenant les logarithmes hyperboliques de part et d'autre, on aura

$$p\,l.a = q \text{ d'où } p = \frac{q}{l.a}$$

c'est-à-dire $$log.n = \frac{l.n}{l.a}$$

parce que $p$ est le logarithme du nombre $n$ pour la base $a$, tandis que $q$ est le logarithme du même nombre pour la base $e$, où est le logarithme hyperbolique de ce nombre.

De la relation

$$log.n = \frac{l.n}{l.a}$$

*il résulte que pour ramener le logarithme d'un nombre de la base e à la base a, il faut diviser le logarithme du nombre pour la base e par le logarithme hyperbolique de la nouvelle base a, ou le multiplier par* $\frac{1}{l.a}$. Dans le cas de $a = 10$, le facteur est celui que nous avons trouvé plus haut. Si donc on introduit le *module* $\frac{1}{l.a}$ dans les séries trouvées précédemment, on aura pour la base $a$

$$log.(n+1) = log.n + \frac{2}{l.a}\left\{\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \text{etc.}\right\}$$

Le développement

$$l.(1+b) = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \text{etc.}$$

en y introduisant le module

$$\frac{1}{l.a} = \frac{1}{A}$$

et supposant

$$1 + b = y \quad \text{d'où} \quad b = y - 1$$

devient

$$log.y = \frac{(y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 + etc.}{A}$$

Mais cette formule n'est convergente que lorsque le nombre $y$ dont elle donne le logarithme est peu différent de l'unité: aussi n'est-elle d'aucune utilité pour le calcul des logarithmes ordinaires. Le moyen suivant est propre à la rendre convergente pour tous les nombres.

L'équation fondamentale

$$y = a^x$$

peut se changer dans celle-ci

$$y^m = a^{mx} \quad \text{d'où} \quad m\,x = log.\,y^m$$

$m$ étant un nombre quelconque entier ou fractionnaire: on aura donc en général

$$log.y = \frac{(y^m - 1) - \frac{1}{2}(y^m - 1)^2 + \frac{1}{3}(y^m - 1)^3 + etc.}{mA}$$

où l'on pourra prendre pour $m$ une fraction $\frac{1}{r}$ telle que $\sqrt[r]{y}$ soit toujours un nombre aussi peu différent de l'unité qu'on voudra. Supposons donc, ce qui est toujours possible, que la racine $r$ de $y$ ne contienne que l'unité avant la virgule, et qu'après la virgule, il se trouve $s$ zéros, alors si on s'arrête à $2s$ décimales, le terme $(y^m - 1)^2$ et, à plus forte raison, les termes suivans ne donneront rien, de sorte qu'on aura dans ce cas

$$log.\, y = \frac{y^m - 1}{mA} = r\,\frac{\sqrt[r]{y} - 1}{A}$$

et sous les mêmes conditions

$$A = r\,(\sqrt[r]{a} - 1)\text{, donc } log.\, y = \frac{\sqrt[r]{y} - 1}{\sqrt[r]{a} - 1}$$

Cette méthode très-simple, donnée par *Lagrange dans le livre des fonctions analytiques*, est celle qui fait trouver de la manière la plus abrégée le logarithme d'un nombre quelconque que l'on cherche isolément. Mais dans le travail de la construction des tables, où un logarithme déjà trouvé peut servir à trouver les logarithmes suivans, la première équation transformée par des substitutions donne des séries plus faciles à calculer

Soit d'abord

$$y - 1 = \frac{2}{n^3 - 3n}$$

mettant cette valeur dans le développement de $log.\, y$, on aura

$$log.\,\frac{n^3 - 3n + 2}{n^3 - 3n} = \frac{1}{la}\left\{\left(\frac{2}{n^3 - 3n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n^3 - 3n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{n^3 - 3n}\right)^3 - \text{etc.}\right\}$$

Soit ensuite

$$y - 1 = -\frac{2}{n^3 - 3n}$$

on aura

$$log.\,\frac{n^3 - 3n - 2}{n^3 - 3n} = \frac{1}{la}\left\{-\left(\frac{2}{n^3 - 3n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n^3 - 3n}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{n^3 - 3n}\right)^3 - \text{etc.}\right\}$$

et soustrayant la seconde équation de la première

$$log.\frac{n^3-3n+2}{n^3-3n}-log.\frac{n^3-3n-2}{n^3-3n}=l.g.\frac{n^3-3n+2}{n^3-3n-2}$$

$$=\frac{2}{la}\left\{\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^5+\text{etc.}\right\}$$

Mais on trouve que

$$\frac{n^3-3n+2}{n^3-3n-2}=\frac{(n-1)^2\,(n+2)}{(n+1)^2\,(n-2)}$$

donc

$$log.\frac{n^3-3n+2}{n^3-3n-2}=2\,log.\,(n-1)+log.\,(n+2)$$
$$-2\,log.\,(n+1)-log.\,(n-2)$$

mettant cette valeur dans l'équation, on aura

$$log.(n+2)=log.(n-2)+2log.(n+1)-2log.(n-1)$$
$$+\frac{1}{la}\left\{\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)+\text{etc.}\right\}$$

Pour calculer les logarithmes au moyen de cette formule, on donnera successivement à $n$ les trois valeurs 3, 4 et 7; on aura donc trois équations qui contiendront *log.* 2, *log.* 3 et *log.* 5, et les combinant on trouvera

$$log.\,2=\frac{1}{la}\left[5\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+\text{etc.}\right)\right.$$
$$\left.+4\left(\frac{1}{26}+\frac{1}{3.26^3}+\frac{1}{5.26^5}+\text{etc.}\right)-3\left(\frac{1}{161}+\frac{1}{3.161^3}+\frac{1}{5.161^5}+\text{etc}\right)\right]$$

$$log.\,3=\frac{1}{la}\left[8\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+\text{etc.}\right)\right.$$
$$\left.+6\left(\frac{1}{26}+\frac{1}{3.26^3}+\frac{1}{5.26^5}+\text{etc.}\right)-4\left(\frac{1}{161}+\frac{1}{5.161^4}+\frac{1}{5.161^5}+\text{etc}\right)\right]$$

$$log.\,5=\frac{1}{la}\left[12\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3.9^3}+\frac{1}{5.9^5}+\text{etc.}\right)\right.$$
$$\left.+8\left(\frac{1}{26}+\frac{1}{3.26^3}+\frac{1}{5.26^5}+\text{etc.}\right)-6\left(\frac{1}{161}+\frac{1}{5.161^3}+\frac{1}{5.161^5}+\text{etc}\right)\right]$$

ensuite cherchant les logarithmes des autres nombres premiers, on aura

$$\log.7 = \log.3 + 2\log.6 - 2\log.4 + \frac{2}{l.a}\left(\frac{1}{55} + \frac{1}{3.55^3} + \frac{1}{5.55^5} + \text{etc.}\right)$$

$$\log.11 = \log.7 + 2\log.10 - 2\log.8 + \frac{2}{l.a}\left(\frac{1}{351} + \frac{1}{3.351^3} + \frac{1}{5.351^5} + \text{etc.}\right)$$

$$\log.13 = \log.9 + 2\log.12 - 2\log.10 + \frac{2}{l.a}\left(\frac{1}{649} + \frac{1}{3.649^3} \frac{1}{5.649^5} + \text{etc.}\right)$$

$$\log.17 = \log.13 + 2\log.16 - 2\log.14 + \frac{2}{l.a}\left(\frac{1}{1665} + \frac{1}{3.1665^3} + \frac{1}{5.1665^5} + \text{etc.}\right)$$

D'où l'on voit que chaque logarithme est donné par une serie très-convergente et par trois autres logarithmes connus: en effet, au moyen des logarithmes de 2, 3 et 5, on trouve, par de simples additions, ceux des autres nombres jusqu'à 7, ceux des nombres entre 7 et 11, entre 11 et 13: on aura donc ainsi les logarithmes des nombres premiers et par conséquent ceux de tous les autres nombres.

Si dans la formule

$$\log.(1+z) = \frac{1}{l.a}\left\{z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \text{etc.}\right\}$$

on fait successivement

$$z = \frac{1}{n} \text{ et } z = -\frac{1}{n}$$

on trouvera

$$\log.(n+1) = \log.n + \frac{1}{l.a}\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \text{etc.}\right\}$$

$$\log.(n-1) = \log.n - \frac{1}{l.a}\left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{4n^4} + \text{etc.}\right\}$$

Supposons successivement $n=10, =100, =1000, =1000$ etc., nous aurons les logarithmes des nombres 9, 11, 99, 101, 999, 1001, 9999, 10001 etc., et on n'aura que la peine de les écrire, car tous les chiffres significatifs sont les mêmes dans tous ces logarithmes, seulement ils y sont suivis de plus ou moins de zéros.

De ces premiers logarithmes, on déduira sans peine ceux

de leurs multiples et de leurs rapports mutuels : on aura par exemple,

$$log.\,3 = \tfrac{1}{2}\,log.\,9 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2l.a}\left(\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{200} + \tfrac{1}{3000} + \tfrac{1}{40000} + \text{etc.}\right)$$

Nous terminerons ce qui concerne cette théorie par l'exposition d'une formule remarquable, en ce qu'elle donne par son premier terme, les logarithmes des nombres au-dessus de 1000 avec dix décimales exactes, lorsqu'on a d'ailleurs ceux des nombres précédens avec la même approximation. Pour cela nous reprendrons la série

$$log.\left(\tfrac{1+z}{1-z}\right) = \tfrac{2}{l.a}\left\{z + \tfrac{z^3}{3} + \tfrac{z^5}{5} + \tfrac{z^7}{7} + \text{etc.}\right\}$$

si on fait

$$\tfrac{1+z}{1-z} = n \text{ d'où } z = \tfrac{n-1}{n+1}$$

on obtiendra la suivante

$$log.\,n = \tfrac{2}{l.a}\left[\left(\tfrac{n-1}{n+1}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{n-1}{n+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{n-1}{n+1}\right)^5 + \text{etc.}\right]$$

et posant $n = \frac{p}{q}$, ce qui donne

$$n-1 = \tfrac{p-q}{q} \text{ et } n+1 = \tfrac{p+q}{q}$$

on aura

$$log.\left(\tfrac{p}{q}\right) = \tfrac{2}{l.a}\left\{\tfrac{p-q}{p+q} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{p-q}{p+q}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{p-q}{p+q}\right)^5 + \text{etc.}\right\}$$

Supposons

$$p = x^4 - 25x^2 = x^2(x^2 - 25) = x^2(x+5)(x-5)$$
$$q = x^4 - 25x^2 + 144 = (x^2 - 9)(x^2 - 16)$$
$$= (x+3)(x-3)(x+4)(x-4)$$

la substitution donnera

$$2\,log.\,x + log.(x+5) + log.(x-5) - log.(x+3)$$
$$- log.(x-3) - log.(x+4) - log.(x-4)$$
$$= -\tfrac{2}{l.a}\left[\tfrac{72}{x^4-25x^2+144} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{72}{x^4-25x^2+144}\right)^3 + \text{etc.}\right]$$

d'où on déduira

$$\log.(x+5) = \log.(x+3) + \log.(x-3) + \log.(x+4) + \log.(x-4) - \log.(x-5) - 2\log.x - \frac{2}{l.a.}\left[\frac{72}{x^4-25x^2+72} + \frac{1}{3}\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right)^3 + \text{etc.}\right]$$

Pour se faire une idée de l'approximation de cette formule, on fera $x = 1000$; substituant cette valeur dans le premier terme de la série précédente, il sera, à très-peu près, $= 0,\ 00000\ 00000\ 72$ etc. et multipliant par le double du module, ou par $\frac{2}{l.a}$, on aura environ $0,\ 00000\ 00000\ 62$ etc. : si on évalue le second terme, on trouvera après avoir fait la multiplication par $\frac{2}{l.a}$

$$0,\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 11 \text{ etc.}$$

Donc le premier terme de la série n'ajoute pas une unité décimale du dixième ordre, et au moyen de tables qui donneroient les logarithmes des 1004 premiers nombres avec trente décimales, il suffiroit du premier terme de cette série pour obtenir ceux des nombres suivans avec la même approximation. La formule précédente est due au citoyen *Haros*, *l'un des géomètres de la section des calculateurs du bureau du Cadastre, où il a donné des preuves soutenues de science et de talent* (*)

Nous passerons à la recherche des développemens de sinus et cosinus d'un arc en des séries qui procèdent suivant les puissances de l'arc. Nous observerons d'abord à l'égard de *sin.* $x$, 1° que tous les termes du développement doivent contenir l'arc $x$ en facteur, parce que lorsque l'arc devient nul, le sinus est nul aussi : 2° que dans aucun de ces termes, l'arc ne doit être affecté d'un exposant fractionnaire positif, ou d'un exposant négatif entier ou fractionnaire, parce que la série étant, par exemple, de cette forme

$$\sin.x = Ax + Bx^2 + \ldots\ldots + Gx^{\frac{m}{n}} \times \sqrt[n]{1} + \text{etc.}$$

à un arc particulier, donné en parties du rayon, corres-

(*) Voyez le rapport fait à l'Institut national, par les citoyens *Legendre* et *Prony*, sur un ouvrage du citoyen *Haros*, qui a pour titre : *Instruction abrégée sur les nouvelles mesures qui doivent être introduites dans toute la République, au 1^er. vendémiaire an X, avec des tables de rapport et de réduction*

pondroient $n$ valeurs du sinus, ce qui n'a pas lieu. Dans l'hypothèse

$$sin.\ x = Ax + Bx^2 + \ldots\ldots + Gx^{-m} + \text{etc.}$$

pour $x=0$, on auroit $sin.\ 0 = \frac{G}{o} = \infty$, ce qui est absurde: on ne peut non plus supposer deux termes tels que $Gx^{-m}$ et $Hx^{-r}$ parce que la conclusion seroit la même. Si on observe aussi que pour $x=0$, le cosinus ne devient pas nul, on déduira de ce qui précède cette forme générale des développemens de $sin.\ x$ et $cos.\ x$

$$sin.\ x = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.}$$

$$cos.\ x = A' + B'x + C'x^2 + \text{etc.}$$

ou $A$, $B$, $C$ etc. $A'$, $B'$, $C'$, etc. sont des coefficiens indépendans de $x$, et indéterminés qu'il s'agit d'évaluer

Mais si on observe encore que lorsque $x$ devient $-x$, $sin\ x$ devient $-\ sin.\ x$, on aura

$$sin.\ x = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.}$$

$$-\ sin.\ x = -Ax + Bx^2 - Cx^3 + Dx^4 - \text{etc.}$$

et ajoutant ces deux identités, puis divisant par 2

$$o = Bx^2 + Dx^4 + Fx^6 + \text{etc.}$$

d'où l'on conclut que les termes des puissances paires de $x$ ne doivent pas rester dans la série du sinus. On a pour $+x$ et pour $-x$

$$cos.\ x = A' + B'x + C'x^3 + D'x^3 + \text{etc.}$$

$$cos.\ x = A' - B'x + C'x^2 - D'x^3 + \text{etc.}$$

et retranchant le second développement du premier, il vient, après avoir divisé par 2

$$o = B'x + D'x^3 + \text{etc.}$$

c'est-à-dire que les puissances impaires de $x$ ne doivent pas faire partie du développement de $cos.\ x$. On doit donc poser

$$sin.\ x = Ax + Cx^3 + Ex^5 + \text{etc.}\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$cos.\ x = A' + C'x^2 + L'x^4 + \text{etc.}$$

Pour évaluer les coefficiens indéterminés $A$, $C$, $E$ etc., nous ferons usage de la propriété suivante, qu'on démontre en trigonométrie

$$sin.\ 3x = 3\ sin.\ x - 4\ sin.^3\ x$$

Si dans l'identité (1) nous écrivons $3x$ pour $x$, puisque nous prenions trois fois le développement de *sin.* $x$ et que nous en retranchions quatre fois le cube du sinus, nous aurons

$$3Ax + 3^3 Cx^3 + 3^5 Ex^5 + 3^7 Gx^7 + \text{etc.}$$
$$= 3Ax + \left.\begin{matrix} 3C \\ -4A^3 \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} 3E \\ -3.4A^2C \end{matrix}\right\} x^5 + \left.\begin{matrix} 3G \\ -3.4AC^2 \\ -3.4A^2E \end{matrix}\right\} x^7 +$$

et comparant les coefficiens des mêmes puissances de $x$, on trouve

$$A = A$$
$$3^3 C = 3C - 4A^3$$
$$3^5 E = 3E - 3.4A^2C$$
$$3^7.G = 3G - 3.4AC^2 - 3.4.A^2E$$
etc.

d'où

$$A = A$$
$$(3^3 - 3)C = -4A^3$$
$$(3^5 - 3)E = -3.4A^2C$$
$$(3^7 - 3)G = -3.4.A(C^2 + AE)$$
etc.

et enfin

$$A = A,\ C = -\frac{A^3}{1.2.3},\ E = \frac{A^5}{1.2.3.4.5},\ G = -\frac{A^7}{2.3.4.5.6.7} \text{ etc.}$$

La première équation fait voir que le coefficient $A$ reste indéterminé; pour l'évaluer, nous observerons que $n$ exprimant le nombre de fois que la longueur de l'arc $x$ est contenue dans la demi-circonférence, le sinus restera toujours le même et de même signe pour les arcs

$$x,\ (n-1)x,\ (2n+1)x,\ (3n-1)x,\ (4n+1)x, \text{etc.}$$

on pourra donc prendre

$$B=1,\ B=n-1,\ B=(2n+1)\ldots\ldots B=mn+1,\ B=(m-1)n-1$$

$m$ étant un nombre entier pair : la détermination la plus simple est, sans doute, $B = 1$, d'où résulte ce développement

$$sin.\,x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

Nous avons trouvé pour la forme générale du développement de *cos. x*

$$cos.\,x = A' + C'x^2 + E'x^4 + G'x^6 + \text{etc.}$$

pour déterminer les coefficiens $A'$, $C'$, etc., nous partirons de la formule connue

$$cos.\,2x = 1 - 2\,sin.^2 x,$$

et mettant pour *cos. 2 x* et *sin.*$^2x$ leurs valeurs en séries, il vient

$$A' + 2^2\,C'x + 2^4\,E'x^4 + 2^6\,G'x^6 + \text{etc.} =$$
$$1 - 2\left[x^2 - \frac{2}{1.2.3}x^4 + \left.\frac{2}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{1.1.2.3.3}\right\} x^6 + \text{etc.}\right]$$

égalant les coefficiens des mêmes puissances de $x$, on obtient

$$A' = 1,\ C' = -\frac{1}{1.2},\ E' = \frac{1}{1.2.3.4},\ G' = \frac{1}{1.2.3.4.5.6},\ \text{etc.}$$

et conséquemment

$$cos.\,x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

Cette méthode offre le double avantage de la facilité de l'exposition, et de la brièveté du calcul : cependant nous croyons devoir faire connoître le procédé de développement le plus généralement employé et que nous extrayons, à très-peu près, *de la trigonométrie de Legendre*, *page* 395.

Si on développe $(cos.\,A + sin.\,A\sqrt{-1})^m$ au moyen de la formule de *Newton*, on aura

$$cos.\,mA + sin.\,mA\sqrt{-1} = cos.^m A + m\,cos.^{m-1}A\,sin.A\sqrt{-1}$$
$$- \frac{m.m-1}{1.2}\,cos^{m-2}.A\,sin^2.A - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\,cos^{m-3}.A\,sin^3.A\sqrt{-1}$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}\,cos^{m-4}.A\,sin^4.A + \text{etc.}$$

Faisant passer tous les termes dans le premier membre, et représentant par $P$ la totalité des termes réels et par $Q\sqrt{-1}$ la somme des termes imaginaires, on aura

$P + Q\sqrt{-1} = 0$ d'où $P = 0$ et $Q = 0$

et conséquemment

$$(A)\ldots\ldots cos.\, mA = cos^m.A - \frac{m.m-1}{1.3} cos^{m-2}A\, sin^2.A + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4} cos^{m-4}.A\, sin^4.A - \text{etc.}$$

$$(B)\ldots. sin.\, mA = m\, cos^{m-1}.A\, sin.\, A - \frac{m.m-1.m-2}{2.3} cos^{m-3}.A\, sin.^3 A + \text{etc.}$$

Ces formules donnent le sinus et le cosinus d'un multiple quelconque d'un arc en fonction du sinus et du cosinus de l'arc simple, et nous nous proposons d'examiner s'il ne seroit pas possible d'exprimer le sinus de l'arc multiple seulement en sinus de l'arc simple. A cet effet, il faudroit dans l'expression de $sin.mA$ substituer au lieu de $cos.A$ sa valeur $\sqrt{1-sin.^2A}$; mais nous remarquerons que $m$ étant impair, toutes les puissances du cosinus dans $sin.\, mA$ sont paires, qu'ainsi dans la substitution, le radical disparoîtra. On peut donc, dans ce cas, exprimer $sin.\, mA$ en fonction du sinus de l'arc simple. Mais lorsque $m$ est pair, toutes les puissances du cosinus sont impaires, le radical ne disparoît plus, et il devient impossible d'exprimer $sin.\, mA$ au moyen de l'arc simple seulement. On démontrera de la même manière qu'il est toujours possible d'exprimer $cos.\, mA$ au moyen du seul cosinus de l'arc simple. L'exposant $m$ étant un nombre entier, les séries ci-dessus sont nécessairement limitées; de plus le développement du binôme devant contenir $m+1$ termes, si $m$ est impair, chacune des formules $(A)$ et $(B)$ en contiendra un nombre $\frac{m+1}{2}$, et si $m$ est pair, la série $(A)$ renfermera $\frac{m}{2}+1$ termes et la série $(B)$ ne sera composée que de $\frac{m}{2}$ termes.

Nous pouvons écrire les développemens de $sin.\, mA$ et $cos.\, mA$ comme il suit

$$cos.\, mA = cos^m.A\left\{1 - \frac{m.m-1}{1.2}\frac{sin.^2A}{cos.^2A} + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}\frac{sin.^4A}{cos.^4A} - \text{etc.}\right\}$$

$$sin.mA = cos^m.A\left\{m\frac{sin.A}{cos.A} - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\frac{sin.^3A}{cos.^3A} + \text{etc.}\right\}$$

En observant que $\frac{sin.A}{cos.A} = tang.\ A$, ces séries se transformeront dans les suivantes

$$cos.\ mA = cos^m.A\left\{1 - \frac{m.m-1}{1.2}\ tang.^2\ A + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}\ tang.^4\ A - \text{etc.}\right\}$$

$$sin.\ mA = cos^m.A\left\{m\ tang.\ A - \frac{m.m-1\ m-2}{1.2.3}\ tang.^3 A + \text{etc.}\right\}$$

Faisons maintenant $m\ A = x$, et nous observerons que si $m$ n'est déterminé que par cette condition, on pourra faire varier $A$ d'une infinité de manières, sans cependant que $x$ varie, en sorte qu'on aura

$$(C)\ldots cos\ x = cos^m.A\left\{1 - \frac{x.x-A}{1.2}\ \frac{tang.^2 A}{A^2} \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x.x-A.x-2A.x-3A}{1.2.3}\ \frac{tang.3A}{A^3} - \text{etc.}\right\}$$

$$(D)\ldots sin.x = cos^m.A\left\{\frac{x}{1}\ \frac{tang.A}{A} - \frac{x.x-A.x-2A}{1.2.3}\ \frac{tang.^3 A}{3} + \text{etc}\right\}$$

Mais de ce que $A$ variant, le produit $x$ ne change pas, il s'en suit que *sin.* $x$ et *cos.* $x$ doivent rester les mêmes, quelques valeurs que l'on donne à $A$: donc les développemens de *sin.* $x$ et *cos.* $x$ ne doivent renfermer que les termes indépendans de $A$: pour les obtenir, il faut chercher quelle doit être la forme des développemens de $cos.^m A$ et de *tang.* $A$ suivant les puissances de $A$. D'abord on démontreroit, comme nous l'avons fait dans la première méthode à l'égard des séries de *sin.* $x$ et *cos.* $x$, que le développement de *tang.* $A$ doit procéder suivant des puissances entières et positives de l'arc, et aussi que l'arc doit entrer dans tous les termes, puisqu'en faisant $A = 0$, on doit trouver *tang.* $A = 0$. Nous supposerons donc

$$tang.\ A = RA + Q\ A^2 + R\ A^3 + \text{etc.}$$

d'où résulte

$$\frac{tang.A}{A} = P + Q\ A + R\ A^2 + \text{etc.}$$

cela posé, on a (*)

Pl. A. Fig. 69

(*) 1°. $AT$ est $> AM$, parce que le triangle $ATC$ : secteur $ACM$ : : $AT \times \frac{1}{2} AC$ : $AM \times \frac{1}{2} AC$ : : $AT$ : $AM$. 2°. $MAN$ est $> MN$; donc $AM$ est $> MP$,

*tang.*

$$tang.\ A > A \text{ d'où } \frac{tang.\ A}{A} > 1$$

on a en même temps

$$A > sin.\ A, \text{ donc } \frac{tang.\ A}{A} < \frac{tang.\ A}{sin.\ A} \text{ ou } \frac{tang.\ A}{A} < \frac{1}{cos.\ A}$$

De là on voit que le rapport $\frac{tang\ A}{A}$ est toujours compris entre les limites 1 et $\frac{1}{cos.A}$ : soit $A=0$, on aura $cos.\ A=1$ ; donc dans la limite

$$\frac{tang.\ A}{A} = 1 + \delta \text{ et } \frac{tang.\ A}{A} = 1 - \delta$$

conséquemment

$$\frac{tang.\ A}{A} = 1$$

donc $P=1$ et

$$\frac{tang.\ A}{A} = 1 + QA + RA^2 + \text{etc.}$$

On a fait voir que le développement de $cos.^m A$ devoit procéder suivant toutes les puissances entières et positives de $A$ ; de plus le premier terme ne doit pas contenir l'arc, afin que pour $A=0$, on ait $cos.^m A=1$, donc

$$cos^m.A = 1 + Q'A + R'A^2 + \text{etc.}$$

Voyons donc ce que deviennent les séries $(C)$ et $(D)$ : d'abord les premiers termes des rapports $\frac{tang.A}{A}$, $\frac{tang.^2 A}{A^2}$ ..... $\frac{tang.^m A}{A^m}$ seront toujours l'unité, et les termes subséquens ne doivent pas être considérés, parce qu'ils introduiroient l'arc $A$ qui ne doit pas rester dans les développemens : par la même raison, on ne peut employer que le premier terme du développement du facteur $cos.^m A$ : on aura donc

$$(E) \ldots\ldots cos.x = 1 - \frac{x.x-A}{1.2} + \frac{x.x-A.x-2A.x-3A}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

$$(F) \ldots\ldots sin.x = \frac{x}{1} - \frac{x.x-A.x-2A}{1.2.3} + \frac{x.x-A.x-2A.x-3A.x-}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

Or il est évident que si on effectuoit les opérations indiquées dans ces développemens, les termes indépendans de

*A* seroient ceux qui résulteroient du produit des premiers termes des facteurs binômes; donc enfin on parvient à

$$(G).....cos.\,x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{x^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} - \text{etc.}$$

$$(K).....sin.\,x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

séries qui sont les mêmes que celles que nous avons précédemment obtenues. On remarquera que dans cette méthode la loi des coefficiens numériques est plus manifeste en ce quelle dérive immédiatement de celle des coefficiens de la puissance $m$ d'un binôme, tandis que dans l'autre analyse elle résultoit de la puissance $m$ d'un infinitinôme

Ces mêmes valeurs *sin.* $x$ et *cos.* $x$ données par les formules $(G)$ et $(K)$ peuvent s'énoncer d'une manière plus succinte au moyen des exponentielles : en effet, si dans la première des trois séries

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}$$

$$cos.x = 1 \quad - \frac{x^2}{1.2} \quad + \frac{x^4}{1.2.3.4} \quad - \text{etc.}$$

$$sin.x = \quad + x \quad - \frac{x^3}{1.2.3} \quad + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

on écrit $x\sqrt{-1}$ à la place de $x$, et qu'on multiplie les deux membres de la troisième par $\sqrt{-1}$, on trouvera par la seule inspection

$$e^{x\sqrt{-1}} = cos.\,x + sin.\,x\sqrt{-1}.....(L)$$

et prenant $\sqrt{-1}$ avec le signe moins

$$e^{-x\sqrt{-1}} = cos.\,x - sin.\,x\sqrt{-1}.....(M)$$

L'addition de ces formules donne

$$cos.\,x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}.....(N)$$

si on soustrait la seconde de la première, on obtient

$$sin.\,x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.....(P)$$

Il résulte de la division de ces deux dernières formules

$$tang.x = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left\{\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}\right\} \ldots\ldots (Q)$$

Les formules $(L)$ et $(M)$ donnent

$$x\sqrt{-1} = l.(cos.x + sin.x\sqrt{-1})$$
$$-x\sqrt{-1} = l.(cos.x - sin.x\sqrt{-1})$$

$l$ indiquant ici un logarithme hyperbolique: d'où on déduit

$$x\sqrt{-1} = l.cos.x + l\{1 + \sqrt{-1}.tang.x\} \ldots\ldots (R)$$

$$-x\sqrt{-1} = l.cos.x + l\{1 - \sqrt{-1}.tang.x\} \ldots\ldots (S)$$

retranchant $(S)$ de $(R)$, on obtient pour résultat

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{\frac{1+\sqrt{-1}.tang.x}{1-\sqrt{-1}.tang.x}\right\} \ldots\ldots (T)$$

mais on sait que

$$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \text{etc.}\right\}$$

en sorte qu'écrivant $\sqrt{-1}.tang.x$ au lieu de $x$, et divisant de part et d'autre par $\sqrt{-1}$, on aura

$$x = tang.x - \tfrac{1}{3}tang.^3x + \tfrac{1}{5}tang.^5x - \tfrac{1}{7}tang.^7x + \text{etc.}$$

formule qui sert à calculer l'arc par sa tangente, lorsque celle-ci est plus petite que l'unité.

Quant à l'emploi numérique des formules données dans ce titre, ou à la construction des tables, nous renverrons au discours qui accompagne les tables de *Callet*, dans lequel j'ai consigné l'annonce des grandes tables logarithmiques et trigonométriques décimales du cadastre, *monument de calcul le plus vaste et le plus imposant qui ait jamais été exécuté ou même conçu*, (ce sont les termes employés par le *citoyen Lagrange*, *Laplace et Delambre* dans un rapport fait à l'Institut). Ces tables du cadastre ont été calculées par une méthode entièrement nouvelle et qui avoit cet avantage qu'on pouvoit employer à la fois un nombre indéfini de calculateurs de la plupart desquels on ne pouvoit exiger d'autres connoissances que celles de l'addition et de la soustraction. Différens motifs ont fait suspendre l'impression de ce grand travail; mais, ajoutent les géomètres chargés du rapport,

espérons que dans des temps de paix et de bonheur, un gouvernement ami des arts, ordonnera l'achevement d'un ouvrage qui doit être desiré de tous ceux qui cultivent les sciences mathématiques: un tel vœu, émis par les premiers géomètres, est pour moi une raison de plus de me féliciter d'avoir coopéré à ce grand œuvre, sous la direction du citoyen *Prony*, directeur du cadastre. Nous recommanderons encore la lecture des préfaces de l'auteur et de l'éditeur des tables logarithmiques et trigonométriques décimales calculées par *Borda*, revues, augmentées et publiées par *Delambre*, membre de l'Institut national de France et du Bureau des longitudes.

Revenons maintenant à la formule (*T*) et supposons $x = \frac{\pi}{2}$, $\pi$ désignant toujours la démi-circonférence ; on aura

$$tang.\ x = \infty$$

et la formule (*T*) deviendra

$$\frac{\pi}{2} = l\left(\frac{\sqrt{-1}}{-\sqrt{-1}}\right) \text{ d'où } \pi = -\sqrt{-1}\, l(-1)$$

résultat qui nous conduit naturellement à parler des logarithmes des nombres négatifs qui donnerent lieu à une contestation entre *Leibnitz* et *Bernouilli* ; mais sans rappeler ici cette discussion, nous démontrerons, d'après *Euler*, *qu'un nombre quelconque positif a une infinité de logarithmes dont un seul est réel, et tous les autres imaginaires*

Reprenons à cet effet la formule

$$x\sqrt{-1} = l(cos.\ x + sin.\ x\sqrt{-1}$$

A $x=0$ correspond

$$0 = l.1$$

ce qu'on sait déjà. Désignant par $\pi$ la demi-circonférence, à $x = 2\pi, = 4\pi, = 6\pi$ etc. correspondront

$$2\pi\sqrt{-1} = l.1$$
$$4\pi\sqrt{-1} = l.1$$
$$6\pi\sqrt{-1} = l.1$$

et généralement

$$2k\pi\sqrt{-1} = l.1$$

$k$ étant un nombre entier. Mais on a l'équation

$$l.A = l.A + l.1$$

donc

$$l.A = l.A + 2k\pi\sqrt{-1}$$

d'où l'on conclut *qu'un nombre quelconque A admet une infinité de logarithmes dont un seul est réel.*

Si dans la formule

$$x\sqrt{-1} = l(\cos. x + \sin. x\sqrt{-1})$$

on suppose $x = \pi$, on aura

$$\cos. x = -1 \text{ et } \sin. x = 0$$

donc

$$l(-1) = \pi\sqrt{-1}$$

ce qui vérifie la propriété.

$$\pi = -\sqrt{-1}\, l(-1)$$

trouvée plus haut. Soit $x = 3\pi; = 5\pi, = 7\pi \ldots\ldots (2k+1)\pi$, $k$ étant un nombre entier, on aura

$$l(-1) = 3\pi\sqrt{-1}$$
$$l(-1) = 5\pi\sqrt{-1}$$
$$l(-1) = 7\pi\sqrt{-1}$$
$$\text{etc.}$$

et généralement

$$l.(-1) = (2k+1)\pi\sqrt{-1}$$

Si on multiplie de part et d'autre par 2, on trouvera

$$2l(-1) = (4k+2)\pi\sqrt{-1}$$

or $(4k+2)\pi$ étant un nombre pair comme $2k\pi$, on voit que

$$2l.(-1) = 2l.1, \text{ d'où } l.(-1) = l.1,$$

ce qui signifie que *le logarithme de* $-1$ *est égal à un des logarithmes imaginaires de l'unité.*

Or

$$-A = A \times -1$$

donc

$$l.(-A) = l.A + l.(-1)$$

et conséquemment

$$l.(-A) = l.A + (2k+1)\pi\sqrt{-1},$$

ce qui étend la conclusion précédente au logarithme d'un nombre quelconque négatif.

*Extension du théorème démontré page 327, aux fonctions logarithmiques, exponentielles et circulaires.*

On a prouvé (page 327) que toute fonction algébrique de la quantité imaginaire $a \pm b\sqrt{-1}$ étoit réductible à la même forme $P \pm Q\sqrt{-1}$, $P$ et $Q$ étant des quantités réelles. Les fonctions logarithmiques, exponentielles et circulaires sont aussi réductibles à la même forme, lorsqu'elles renferment des quantités imaginaires.

Soit 1°. $l.(a \pm b\sqrt{-1})$ : en faisant (page 387)

$$\sqrt{a^2+b^2} = r, \cos. z = \frac{a}{r}, \sin. z = \frac{b}{r}$$

on a

$$a \pm b\sqrt{-1} = r(\cos. z \pm \sin. z)\sqrt{-1}$$

et $$l.(a \pm b\sqrt{-1}) = l.r + l.(\cos. z \pm \sin. z\sqrt{-1})$$

mais l'équation

$$e^{\pm z\sqrt{-1}} = \cos. z \pm \sin. z\sqrt{-1}$$

donne

$$\pm z\sqrt{-1} = l.(\cos. z \pm \sin. z\sqrt{-1})$$

donc

$$l.(a \pm b\sqrt{-1}) = l.r \pm z\sqrt{-1}$$

Les données étant seulement $r$, $\cos. z$ et $\sin. z$, on pourra prendre au lieu de l'arc $z$ les arcs $2\pi + z$, $4\pi + z$, etc., $2k\pi + z$, $k$ étant un nombre entier; en sorte qu'on aura pour $l(a \pm b\sqrt{-1})$ une infinité de valeurs comprises dans la même formule $lr \pm (2k\pi + z)\sqrt{-1}$ : donc

$$P = lr, Q = (2k\pi + z)$$

Considérons, en second lieu, l'exponentielle $e^{a \pm b\sqrt{-1}}$ : on a

$$e^{a \pm b\sqrt{-1}} = e^a \times e^{\pm b\sqrt{-1}} = e^a(\cos. b \pm \sin. b\sqrt{-1})$$

donc

$$P = e^a \cos. b, Q = \pm e^a \sin. b$$

Soit en troisième lieu $(a \pm b\sqrt{-1})^{m \pm n\sqrt{-1}}$ : on a

$$l.(a \pm b\sqrt{-1})^{m\pm n\sqrt{-1}} = (m \pm n\sqrt{-1})\, l.(a \pm b\sqrt{-1})$$
$$= l.e^{(m\pm n\sqrt{-1})l.(a\pm b\sqrt{-1})}$$

$e$ désignant la base des logarithmes hyperboliques; et passant des logarithmes aux nombres, il vient

$$(a \pm b\sqrt{-1})^{m\pm n\sqrt{-1}} = e^{(m\pm n\sqrt{-1})l.(a\pm b\sqrt{-1})}$$

Si on substitue pour $l.(a \pm b\sqrt{-1})$ sa valeur $l.r \pm z\sqrt{-1}$, il en résultera

$$(a \pm b\sqrt{-1})^{m\pm n\sqrt{-1}} = e^{(m\pm n\sqrt{-1})(l.r\pm z\sqrt{-1})}$$
$$= e^{mlr - nz \pm (mz + nl.r)\sqrt{-1}}$$
$$= e^{mlr-nz} \times e^{\pm(mz+nlr)\sqrt{-1}}$$
$$= e^{mlr-nz} \cdot [cos.(mz \pm nl.r) \pm sin.(mz \pm n\, l.r)\sqrt{-1}]$$

résultat de la forme

$$P \pm Q\sqrt{-1}$$

Soit enfin la fonction circulaire $sin.(a \pm b\sqrt{-1})$, on aura

$$sin.(a \pm b\sqrt{-1}) = sin.\, a\, cos.\, b\sqrt{-1} \pm cos.\, a\, sin.b\sqrt{-1}$$

Pour obtenir $sin.\, b\sqrt{-1}$ et $cos.\, b\sqrt{-1}$, on écrira $b\sqrt{-1}$ au lieu de $x$ dans les formules

$$sin.\, x = \frac{e^{+x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \quad cos.\, x = \frac{e^{+x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

données (page 414), et il résultera de ces substitutions

$$sin.\, b\sqrt{-1} = \frac{e^{-b} - e^{b}}{2\sqrt{-1}}, \quad cos.\, b\sqrt{-1} = \frac{e^{-b} + e^{b}}{2}$$

substituant ces valeurs, on aura

$$sin.(a \pm b\sqrt{-1}) = \left(\frac{e^{b} + e^{-b}}{2}\right) sin.\, a \pm \left(\frac{e^{-b} - e^{b}}{2}\right) cos.\, a\sqrt{-1}$$

On trouveroit aussi

$$cos.(a \pm b\sqrt{-1}) = \left(\frac{e^{b} + e^{-b}}{2}\right) cos.\, a \pm \left(\frac{e^{-b} - e^{b}}{2}\right) sin.\, a\sqrt{-1}$$

Les autres fonctions circulaires telles que la tangente, la sécante etc. s'expriment algébriquement au moyen du sinus et du cosinus : elles seront donc aussi réductibles à la même forme

$$P \pm Q\sqrt{1}.$$

## *Formules diverses.*

Il sera bon de s'exercer à démontrer les formules suivantes qui trouvent souvent leur application. Si on connoît les logarithmes de $a$ et de $b < a$ et qu'on fasse

$$tang.x = \sqrt{\frac{b}{a}};\ sin.z = \sqrt{\frac{b}{a}};\ sec\ y = \frac{a}{b};\ tang.u = \frac{b}{a};\ sin.\ t = \frac{b}{a}$$

on aura

$$log.(a+b) = log.a + 2log.\ sec.\ x = log.\ a + log.\ 2 + 2\,log.\cos.\tfrac{1}{2}y$$
$$= log.b + log.\ tang.\ y + log.cot.\tfrac{1}{2}y$$

$$log.(a-b) = log.a + 2log.\cos.z = log.a + log.\ 2 + 2log.\ sin.\tfrac{1}{2}y$$
$$= log.b + log.\ tang.\ y + log.tang.\tfrac{1}{2}y$$

$$log.(a+b)(a-b) = log.(a^2 - b^2) = 2\ log.\ a$$
$$+ 2\ log.\ sin.\ y = 2\ log.\ b + 2\ log.\ tang.\ y$$

$$log.\left(\frac{a-b}{a+b}\right) = log.\ tang.\ (50^g - u) = 2\ log.\ tang.\tfrac{1}{2}y\ (*)$$

$$log.\sqrt{a^2 - b^2} = log.\ a + log.\ sin.\ y = log.\ b + log.\ tang.\ y$$

$$log.\sqrt{a^2 + b^2} = log.\ a + log.\ sec.\ u = log.\ b + log.\ co\text{-}sec.\ u$$

$$log.\sqrt{a+b} = \tfrac{1}{2}log.a + log.sec.x = \tfrac{1}{2}log.a + \tfrac{1}{2}log.2 + log.\cos.\tfrac{1}{2}y$$

$$log.\sqrt{a-b} = \tfrac{1}{2}log.a + log.\cos.z = \tfrac{1}{2}log.a + \tfrac{1}{2}log.2 + log.\sin.\tfrac{1}{2}y$$

$$log.(a \pm b)^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}[log.\ a + log.\cos.\ t + log.\ tang.\ (50 \pm \tfrac{1}{2}t)]$$

---

(*) Le quart de cercle étant supposé divisé en 100 parties ou degrés, le degré en 100 minutes, et la minute en 100 secondes. (*Voyez les tables des logarithmes des sinus, sécantes et tangentes, suivant la nouvelle division du cercle, et la table des logarithmes des nombres, depuis 10 mille jusqu'à 100 mille, calculées par Ch. Borda.*

maintenant, soit

$$\frac{m}{n}\ log.\ tang.\ (50^\circ - \tfrac{1}{2}t) = log.\ tang.\ \varphi$$

on aura

$$log.\left[(a+b)^{\frac{m}{n}} + (a-b)^{\frac{m}{n}}\right] = \frac{m}{n}\ (log.\ a + log.\ cos.\ t) + log.\ 2 + log.\ co\text{-}sec.\ 2\varphi$$

$$log.\left[(a+b)^{\frac{m}{n}} - (a-b)^{\frac{m}{n}}\right] = \frac{m}{n}\ (log.\ a + log.\ cos.\ t) + log.\ 2 + log.\ cot.\ 2\varphi$$

L'antepénultième formule nous conduit naturellement à démontrer la légitimité de la formule du binôme dans le cas de l'exposant entier négatif, et de l'exposant fractionnaire tant positif que négatif

## *Démonstration du binome de Newton, dans le cas de l'exposant fractionnaire positif ou négatif, et de l'exposant entier négatif.*

Si on multiplie

$$1 + mz + \frac{m.m-1}{1.2}z^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}z^3 + \text{etc.}\ (M)$$

par

$$1 + nz + \frac{n.n-1}{1.2}z^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}z^3 + \text{etc.}\ (M')$$

facteurs qui sont les développemens de $(1+z)^m$ et $(1+z)^n$ dans le cas de $m$ et $n$, nombres entiers et positifs, on aura un produit de la forme

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.}\ldots\ldots(P)$$

où les coefficiens $A$, $B$, $C$, etc. sont indépendans de $z$ et renferment d'une manière néeessaire les exposans $m$ et $n$. Or à ne considérer $(M)$ et $(M')$ que comme des facteurs, et $(P)$ comme leur produit, on pourra, dans les deux membres de l'identité

$$(M) \times (M') = (P)$$

faire sur $m$ et sur $n$ les mêmes hypothèses, c'est-à-dire, supposer l'un de ces nombres, ou les deux à la fois, fractionnaires positifs ou négatifs et entiers négatifs : représentant $(M)$ par $F(m)$ et $(M')$ par $F(n)$, parce que $m$ et $n$ sont les seules quantités qui doivent varier dans cette question, on aura, dans le cas de $m$ et $n$ nombres entiers

$$F(m+n)=F(m)\times F(n)$$

parce que $(1+z)^{m+n}=(1+z)^m(1+z)^n$ : cette formule fait voir que le facteur $(M)$ se change dans le produit $(P)$, lorsque $m$ devient $m+n$ : mais les coefficiens $A$, $B$, $C$, etc. étant composés en $m$ et $n$ comme ils le seroient en $\frac{m}{r}$ et $\frac{n}{r}$, et le facteur $F(m)$ étant aussi en $m$ ce qu'il seroit en $\frac{m}{r}$, on aura nécessairement aussi la propriété

$$F\left(\frac{m+n}{r}\right)=F\left(\frac{m}{r}\right)\times F\left(\frac{n}{r}\right)$$

or $n$ devenant $n+p$, on a

$$F\left(\frac{m+n+p}{r}\right)=F\left(\frac{m}{r}\right)\times F\left(\frac{n+p}{r}\right)=F\left(\frac{m}{r}\right)\times F\left(\frac{n}{r}\right)\times F\left(\frac{p}{r}\right)$$

d'après la décomposition précédente. Si après avoir introduit un nombre $r$ de lettres $m$, $n$, $p$ etc., on fait $m=n=p$ etc., on obtiendra

$$F(m)=\left\{F\left(\frac{m}{r}\right)\right\}^r \text{ d'où } F\left(\frac{m}{r}\right)=\left\{F(m)\right\}^{\frac{1}{r}}$$

et parce que $F(m)=(1+z)^m$, on conclura

$$F\left(\frac{m}{r}\right)=(1+z)^{\frac{m}{r}}$$

On déduit de cette formule que *pour passer du développement de* $(1+z)^m$ *à celui de* $(1+z)^{\frac{m}{r}}$, $\frac{m}{r}$ *étant une fraction vraie, il faut, dans le premier développement, remplacer* $m$ *par* $\frac{m}{r}$.

Mais il résulte de la considération qui a servi à déduire

$$F\left(\frac{m+n}{r}\right)=F\left(\frac{m}{r}\right)\times F\left(\frac{n}{r}\right) \text{ de } F(m+n)=F(m)\times F(n)$$

que la première propriété seroit encore vraie dans le cas de $\frac{-m}{r}$ et $\frac{-n}{r}$ ou de $-m$ et de $-n$ : d'où on conclut la démonstration de la proposition dans toute l'étendue de l'énoncé.

*Sommation des puissances des termes d'une progression arithmétique, des nombres figurés et des produits différens qu'on peut former avec tous les termes d'une progression arithmétique, pris 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, etc.*

Soit la progression arithmétique $\div a.b.c.d...k.u$, en sorte qu'il s'agisse de trouver la somme

$$a^m + b^m + c^m + d^m + \text{etc.} \quad k^m + u^m$$

$m$ étant un nombre entier positif : par la nature de la progression, on a

$$\left\{\begin{array}{l} b = a + \delta \\ c = b + \delta \\ d = c + \delta \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ u = k + \delta \end{array}\right\}$$

$\delta$ étant la raison ; d'où on déduit les équations suivantes

$$b^m = a^m + ma^{m-1}\delta + \frac{m.m-1}{2} a^{m-2}\delta^2 + \text{etc.}$$

$$c^m = b^m + mb^{m-1}\delta + \frac{m.m-1}{2} b^{m-2}\delta^2 + \text{etc.}$$

$$d^m = c^m + mc^{m-1}\delta + \frac{m.m-1}{2} c^{m-2}\delta^2 + \text{etc.}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u^m = k^m + mk^{m-1}\delta + \frac{m.m-1}{2} k^{m-2}\delta^2 + \text{etc.}$$

Ajoutant ces équations membre à membre, et effaçant les termes communs, on aura, en transposant $a^m$ dans le premier membre,

$$u^m - a^m = m\delta\,(a^{m-1} + b^{m-1} + c^{m-1} + \text{etc.}\ldots + k^{m-1})$$
$$+ \frac{m.m-1}{2}\delta^2\,(a^{m-2} + b^{m-2} + c^{m-2} + \text{etc.}\ldots + k^{m-2})$$
$$+ \frac{m.m-1}{2}.\frac{m-2}{3}\delta^3\,(a^{m-3} + b^{m-3} + c^{m-3} + \text{etc.}\ldots + k^{m-3})$$
$$+ \text{etc.}$$

Supposons maintenant, pour plus de simplicité, que les sommes des puissances successives de chacun des termes de la progression ci-dessus soient représentées par $S_1, S_2, S_3, S_4 \ldots S_{m-1}, S_m$ ; l'équation précédente deviendra, au moyen de ces abréviations,

$$u^m - a^m = m\delta\,(S_{m-1} - u^{m-1}) + \frac{m.m-1}{2}\delta^2\,(S_{m-2} - u^{m-2})$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2}{2\ 3}\delta^3\,(S_{m-3} - u^{m-3}) + \text{etc.}\ldots.(Q)$$

Cette équation nous fait connoître la relation entre les sommes des différentes puissances des termes d'une progression arithmétique, et par conséquent elle donnera $S_{m-1}$, lorsque les sommes $S_1\ S_2\ S_3 \ldots S_{m-2}$ seront connues.

Si nous supposons $m = 1$, il en résultera

$$u - a = \delta\,(S_0 - u^0)$$

or

$$S_0 = a^0 + b^0 + c^0 + \ldots + k^0 + u^0 = n$$

$n$ étant le nombre des termes ; donc

$$u - a = (n-1)\delta \text{ ou } u = a + (n-1)\delta$$

ce qu'on sait déjà. Supposant $m = 2$, il viendra

$$u^2 - a^2 = 2\delta\,(S_1 - u) + \delta^2\,(S_0 - u^0)$$

mais

$$S_0 - u^0 = n - 1 = \frac{u-a}{\delta}$$

et substituant dans la formule précédente, on trouve

$$u^2 - a^2 = 2\delta\,(S_1 - u) + \delta\,(u - a)$$

d'où on déduit, toutes réductions faites

$$S_1 = \frac{u^2 - a^2 + \delta u + \delta a}{2\delta} = \frac{n(u+a)}{2}$$

ce qu'on sait encore. Continuant ainsi à faire $m=2, =3, =4$, etc., on parviendra facilement à exprimer $S_2, S_3, S_4$, etc. L'équation

$$S_2 = \frac{2(u^3-a^3) + 3\delta(u^2+a^2) + \delta(u-a)}{1.2.3}$$

déduite de la formule générale, dans le cas de $m=3$, peut servir à trouver la somme des quarrés de la suite des nombres naturels : pour cela, on supposera

$$a=1, \delta=1$$

et comme le dernier terme est alors égal au nombre des termes, on fera

$$u=n$$

et substituant, il viendra

$$S_2 = \frac{2(n^3-1) + 3(n^2+1) + n - 1}{1.2.3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$$

La somme des cubes d'un nombre $n$ de termes de la suite des nombres naturels correspondroit aux hypothèses $m=4$, $a=1$, $\delta=1$, $u=n$, et on trouveroit

$$S_3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Reprenons les deux formules

$$u = a + (n-1)\delta, \; S = \frac{(a+u)n}{2}$$

Si on fait $a=1$, et qu'on substitue pour $u$ la valeur correspondante dans la seconde formule, on obtiendra

$$S = \frac{n}{2}\{2 + (n-1)\delta\} = n + \frac{n}{2}(n-1)\delta$$

maintenant on aura

pour $\delta = 1 \ldots . S = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ .....(1°)

$\delta = 2 \ldots . S = n^2$.....(2°)

$\delta = 3 \ldots . S = n + \frac{3}{2}(n^2-n) = \frac{3n^2-n}{2}$ ....(3°)

$\delta = 4 \ldots . S = n + 2(n^2-n) = 2n^2-n$...(4°)

$\delta = 5 \ldots . S = n + \frac{5}{2}(n^2-n) = \frac{5n^2-3n}{2}$....(5°)

etc. etc. etc.

Si dans (1°) on fait successivement $n=1, =2, =3, =4$, etc., on aura la suite des nombres

1, 3, 6, 10, 15, etc.

Ces nombres ont été nommés *triangulaires* ou *trigonaux*, parce qu'il est possible de disposer en triangle équilatéral un nombre de points, égal à celui des unités que chacun d'eux renferme.

La formule (2°.) donne, par les mêmes substitutions, la suite

1, 4, 9. 16, 25, etc.

Ces nombres ont été nommés *quadrangulaires*, parce qu'il est possible de disposer en quarré un nombre de points, égal à celui d'unités qu'ils renferment. Chaque terme de cette dernière suite résulte de l'addition d'un certain nombre de termes de la suite des nombres impairs, à partir de l'unité inclusivement.

La formule (3°) donne la suite des nombres qu'on appelle *pentagones*, à cause d'une propriété analogue aux précédentes.

Les nombres qui résultent de ces formules (1°), (2°), (3°), etc., portent collectivement la dénomination de *nombres figurés*.

La formule (*Q*) donnée ci-dessus sert à trouver la somme d'un nombre quelconque de termes d'une suite dont le terme général est exprimé par des puissances entières et positives du nombre des termes. Supposons, en effet, que le terme général d'une suite soit $an^p$, $a$ étant un coefficient connu,

$n$ le nombre des termes et $p$ un nombre entier et positif; la suite sera

$$a\,1^p + a\,2^p + a\,3^p + a\,4^p + \ldots\ldots + a\,n^p$$

Puisque chaque terme doit se déduire du terme général en $y$ faisant successivement $n = 1, = 2, = 3, = 4$, etc. la somme sera donc

$$a\{1^p + 2^p + 3^p + 4^p + \ldots\ldots + n^p\} = a\,S_p$$

mais on peut au moyen de la formule $(Q)$ évaluer $S_p$, on aura donc résolu la question.

Si le terme général étoit $a\,n^p + b\,n^q$, chaque terme de la suite à laquelle il appartiendroit, se composeroit de la somme des termes de même rang dans les deux suites qui auroient chacune pour terme général $an^p$ et $bn^q$: or la somme des termes de la première suite est $a\,S_p$, et celle des termes de la seconde est $b\,S_q$, donc la somme des termes de la série proposée seroit $aS_p + bS_q$.

On voit, en général, que si le terme général d'une série est

$$a\,n^p + b\,n^q + c\,n^r + \text{etc.}$$

la somme des termes de cette série, sera

$$a\,S_p + b\,S_q + c\,S_r + \text{etc.}$$

Soit, pour exemple, la suite des nombres naturels

$$1, 2 . 3 . 4 . 5 \ldots\ldots n$$

le terme général étant $= n$, la somme de tous les termes sera $= S$, mais la formule $(Q)$ donne, comme on l'a déjà vu,

$$S_1 = \frac{n(u+a)}{2}$$

et supposant $a = 1$ et $u = n$, on aura

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soit la suite

$$1 . 3 . 6 . 10 \ldots\ldots \frac{n(n+1)}{2}$$

puisqu'on a pour expression du terme général

$$\frac{n(n+1)}{1} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

la somme sera

$$\frac{S_0}{2}+\frac{S_1}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{2n^3+6n^2+4n}{1.2.3.}\right\}=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$$

Soit, pour dernier exemple, la suite

$$1.4.10.20.\ldots\ldots\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3.}$$

dont le terme général est

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}=\frac{1}{6}n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{2}{6}n$$

on trouvera pour la somme d'un nombre $n$ des termes

$$\frac{S_0}{6}+\frac{3S_2}{2}+\frac{2S_1}{6}=\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{2.4}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$$

On voit donc que la somme d'un nombre $n$ de termes de chacune de ces suites est le terme général de la série suivante, en sorte que les termes de celle-ci sont les sommes successives d'autant de termes de la série précédente qu'il y a d'unités dans l'indice du terme *sommatoire*.

Cherchons actuellement le nombre des produits différens qu'on peut former avec tous les termes d'une progession arithméthique, pris deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc.

Soit la progression arithmétique

$$a+h.\ a+2h.\ a+3h.\ a+4h.\ldots\ldots a+(m-1)h$$

Si on forme une équation dont les racines soient

$$-(a+h),-(a+2h),-(a+3h),\text{ etc}\ldots.-\{a+(m-1)h\}$$

et qu'on en désigne les coefficiens successifs par $A'$, $A''$, $A'''$, $A^{(m-1)}$, on aura l'identité

$$x^{m-1}+A'x^{m-2}+A''x^{m-3}+\ldots\ldots+A^{(m-1)}=$$
$$(x+a+h)(x+a+2h)(x+a+3h)\ldots\ldots$$
$$\{x+a+(m-1)h\}\ldots\ldots(1)$$

dans laquelle $A'$, $A''\ldots.A^{(m-1)}$ seront les produits qu'il s'agit d'évaluer. Si dans l'identité précédente on écrit $h+x$ pour $x$, on aura

$$(x+h)^{m-1}+A(x+h)^{m-2}+A''(x+h)^{m-3}+\ldots\ldots=$$
$$=(x+a+2h)(x+a+3h)\ldots\ldots(x+a+mh)$$

Si

Si on multiplie (1) par $x+a+mh$ et (2) par $x+a+h$, on aura les produits identiques

$$(x+a+mh)\{x^{m-1}+A'x^{m-2}+A''x^{m-3}+\ldots\ldots+A^{(m-1)}\}$$
$$=(x+a+h)\{(x+h)^{m-1}+A'(x+h)^{m-2}$$
$$+A''(x+h)^{m-3}\ldots\ldots\ldots+A^{(m-1)}\}$$

résultat auquel on peut donner la forme

$$\left.\begin{matrix}x+A'\\+a\\+mh\end{matrix}\right\}x^m\ \left.\begin{matrix}+A''\\+A'a\\+A'mh\end{matrix}\right\}x^{m-2}+\left.\begin{matrix}A'''\\+A''a\\+A''mh\end{matrix}\right\}x^{m-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots+\left.\begin{matrix}A^{(m-1)}\\+A^{(m-2)}a\\+A^{(m-3)}mh\end{matrix}\right\}x+A^{(m-1)}(a+mh)$$

$$=x^m+mh\left.\begin{matrix}\\+A'\\+a\end{matrix}\right\}x^{m-1}+\frac{m.m-1}{2}h^2\left.\begin{matrix}\\+[(m-1)(A'+a)]h\\+A''+A'a\end{matrix}\right\}x^{m-2}$$
$$+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}h^3\left.\begin{matrix}\\+\frac{(m-1)(m-2)}{2}(A'+a)h^2\\+(m-2)(A''+A'a)h\\+A'''+A''a\end{matrix}\right\}x^{m-3}\ldots\ldots\ldots\ldots+h^m$$
$$+(A'+a)h^{m-1}$$
$$+(A''+aA')h^{m-2}$$
$$+A'''+aA'')h^{m-3}$$
etc.

Comparant les coefficiens des mêmes puissances de $x$, on obtient les équations

$$A'+a+mh=A'+a+mh$$
$$A''+A'a+A'mh=\frac{m(m-1)}{1.2}h^2+(m-1)A'h+(m-1)ah+A''+A'a$$
$$A'''+A''a+A''mh=\frac{m(m-1).(m-2)}{1.2.3}h^3+(A'+a)\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}h^2$$
$$+(A''+A'a)(m-2)h+A'''+A''a$$
etc. etc.

dont la première ne fait rien connoître : on déduit des suivantes

$$A' = (m-1)a + \frac{m(m-1)}{1.2}\,h$$

$$2A'' = (m-2)A'\,a + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}(A'+a)h + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\,h^2$$

$$3A''' = (m-3)A''\,a + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2}(A''+A'a) +$$

$$\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}(A'+a)h^2 + \frac{m.(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\,h^3$$

etc. etc.

Si on fait $a=0$ et $h=1$, les équations précédentes donneront les produits un à un, deux à deux, trois à trois, etc. des nombres naturels depuis 1 jusqu'à $m-1$, et on aura

$$A' = \frac{m(m-1)}{2}$$

$$2A'' = \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}A' + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$$

$$3A''' = \frac{(m-2)(m-3)}{1.2}A'' + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}A' +$$

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{1.2.3.4}$$

$$4A^{IV} = \frac{(m-3)\,(m-4)}{1.2}A''' + \frac{(m-2)\,(m-3)\,(m-4)}{1.2.3}A'' +$$

$$+ \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4} + \frac{m(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,(m-4)}{1.2.3.4.5}$$

résultats dont la loi est facile à saisir.

## *Des suites récurrentes.*

On a vu ( page 246 ) qu'une fraction rationnelle de la forme

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots + px^{m-1}}{1 - a'x - b'x^2 - c'x^3 \ldots\ldots - q'x^m}$$

engendroit une suite dans laquelle le coefficient d'un terme quelconque, à partir du $m^{ème}$, dépendoit de ceux des $m$ termes précédens, suivant une loi constante déterminée par le dénominateur de la fraction développée. Cette re-

lation qui existe toujours entre un même nombre de termes consécutifs, a fait appeler ces suites *récurrentes*, et les quantités

$$q^{l}\ldots.c^{l},\ b^{l},\ a^{l}$$

par lesquelles il faut multiplier les coefficiens des termes qui précèdent celui qu'on cherche, portent ensemble le nom *d'échelle de relation.*

On a déjà traité ( page 246 ) le problême suivant : *Etant donnée la fraction rationnelle, trouver la suite qui provient de son développement.* Il reste encore, pour terminer ce que nous avons à dire sur cette matière, à résoudre les deux questions suivantes :

1°. *Etant données la suite récurrente et l'échelle de relation, trouver la fraction rationelle génératrice, et la somme d'un nombre quelconque de termes d'une telle suite.*

2°. *Déterminer l'expression d'un terme quelconque indépendamment de ceux qui le précèdent, ou le terme général.*

L'échelle de relation étant donnée, le dénominateur de la fraction génératrice est connu ; il n'y a plus, pour résoudre la première question, que le numérateur à déterminer.

Soit donc proposée la série

$$A+Bx+Cx^{2}+Dx^{3}+Ex^{4}+\text{etc.}$$

dont l'échelle de relation soit

$$a^{l}-b^{l}+c^{l}-d^{l}$$

le dénominateur de la fraction génératrice sera

$$1-a^{l}x+b^{l}x^{2}-c^{l}x^{3}+d^{l}x^{4}$$

Soit $a+bx+cx^{2}+dx^{3}$ le numérateur, les coefficiens $a, b, c, d$ doivent être tels que la proposée résulte du développement de la fraction

$$\frac{a+bx+cx^{2}+dx^{3}}{1-a^{l}x+b^{l}x^{2}-c^{l}x^{3}+d^{l}x^{4}}$$

Il faudra donc que l'identité

$$a+bx+cx^{2}+dx^{3}=$$

$$(A+Bx+Cx^{2}+Dx^{3}+\text{etc.})(1-a^{l}x+b^{l}x^{2}-c^{l}x^{3}+d^{l}x^{4})$$

ait lieu quelque soit $x$ ; ce qui donne, en développant et comparant les coefficiens des mêmes puissances de $x$,

$$a = A$$
$$b = B - a'A$$
$$c = C - a'B + b'A$$
$$d = D - a'C + b'B - c'A$$
$$\text{etc.}$$

donc la fraction génératrice demandée sera

$$\frac{A + (B - a'A)x + (C - a'B + b'A)x^2 + (D - a'C + b'B - c'A)x^3}{1 - a'x + b'x^2 - c'x^3 + d'x^4}$$

Il est facile de comprendre maintenant comment on trouve la somme d'une suite récurrente continuée jusqu'à un terme donné. En effet, supposons qu'il soit question de trouver la somme de la série proposée jusqu'au terme $Px^n$ inclusivement, et faisons

$$S = A + Bx + Cx^2 + \text{etc.} \ldots\ldots + Px^n$$

Comme la somme de cette série prolongée à l'infini est connue, cherchons celle des termes qui suivent le dernier $Px^n$ à l'infini, que nous supposerons

$$S' = Qx^{n+1} + Rx^{n+2} + Sx^{n+3} + Tx^{n+4} + \text{etc.}$$

cette série divisée par $x^{n+1}$, donne une série récurrente parfaitement conforme à la première, dont la somme sera

$$S' = \frac{Qx^{n+1} + (R - a'Q)x^{n+2} + (S - a'R + b'Q)x^{n+3} + (T - a'S + b'R - c'Q)x^{n+4}}{1 - a'x + b'x^2 - c'x^3 + d'x^4}$$

donc la somme cherchée

$$S = \frac{A + (B - a'A)x + (C - a'B + b'A)x^2 + (D - a'C + b'B - c'A)x^3}{1 - a'x + b'x^2 - c'x^3 + d'x^4}$$
$$- \frac{[Qx^{n+1} + (R - a'Q)x^{n+2} + (S - a'R + b'Q)x^{n+3} + (T - a'S + b'R - c'Q)x^{n+4}]}{1 - a'x + b'x^2 - c'x^3 + d'x^4}$$

On opéreroit de la même manière pour trouver la fraction génératrice, dans le cas où l'échelle de relation seroit composée d'un plus grand nombre de termes.

Soit, pour exemple, la série

$$1 + 8x + 27x^2 + 64x^3 + 125x^4 + \text{etc.}$$

dont l'échelle de relation est

$$4 - 6 + 4 - 1$$

le dénominateur sera

$$1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 = (1 - x)^4$$

et on trouvera

$$a = 1$$
$$b = -4 + 8 = 4$$
$$c = 6 - 32 + 27 = 1$$
$$d = 64 - 108 + 48 - 4 = 0$$

et par conséquent $1 + 4x + x^2$ pour le numérateur. La fraction rationnelle génératrice sera donc

$$\frac{1 + 4x + x^2}{1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4} = \frac{1 + 4x + x^2}{(1 - x)^4}$$

Soit, pour second exemple, la série

$$1 - 6x + 12x^2 - 48x^3 + 120x^4 - \text{etc.}$$

dont l'échelle de relation est

$$-1 + 6$$

le dénominateur de la fraction sera

$$1 + x - 6x^2$$

on trouvera ensuite

$$a = 1, \; b = -5, \; c = 0$$

donc

$$\frac{1 - 5x}{1 + x - 6x^2}$$

représentera la fraction dont la série proposée est le développement, et

$$\frac{1 - 5x + 408x^6 - 720x^5}{1 + x - 6x^2}$$

sera la somme des cinq premiers termes de cette série.

Occupons-nous maintenant de la recherche du terme général. Considérons d'abord la fraction rationnelle la plus simple

$$\frac{A}{1-rx}$$

La série résultante de son développement est

$$A(1+rx+r^2x^2+r^3x^3+\ldots\ldots+r^nx^n)$$

dont le terme général est $Ar^nx^n$. On appelle ainsi cette expression, parce qu'en y mettant successivement tous les nombres entiers au lieu de $n$, on a tous les termes de la série.

Si la fraction rationnelle génératrice avoit pour dénominateur un polynome d'un degré plus élevé que le premier, et qu'on pût, par un moyen quelconque, la décomposer en une suite de fractions simples de la forme

$$\frac{A}{1-rx};\ \frac{A'}{1-r'x};\ \frac{A''}{1-r''x}\text{ etc.}$$

il seroit facile d'obtenir le terme général de la série résultante du développement de la fraction proposée, parce que ce terme général seroit la somme des termes généraux des séries que donneroient les fractions simples. En effet, soient

$$A\ (1+r\,x\ +r^2\,x^2\ +r^3\,x^3\ +\ldots\ldots\ldots+r^n\,x^n+\text{etc.})$$
$$A'\ (1+r'\,x\ +r'^2\,x^2\ +r'^3\,x^3\ +\ldots\ldots\ldots+r'^n\,x^n+\text{etc.})$$
$$A''\ (1+r''\,x\ +r''^2\,x^2\ +r''^3\,x^3\ +\ldots\ldots\ldots+r''^n\,x^n+\text{etc.})$$
$$A'''\ (1+r'''x+r'''^2x^2+r'''^3x^3+\ldots\ldots\ldots+r'''^nx^n+\text{etc.})$$

les séries récurrentes qui naissent de chacune des fractions simples, et

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots\ldots+Rx^n+\text{etc.}$$

le développement de la fraction proposée; comme on auroit, par l'hypothèse, l'équation identique

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3+\ldots+px^{m-1}}{1-a'x-q'x^2\ldots-q'x^m}=\frac{A}{1-rx}+\frac{A'}{1-r'x}+\frac{A''}{1-r''x}+\text{etc.}$$

la suivante

$$\left.\begin{array}{l} +A\ +Ar \\ +A'\ +A'r' \\ +A''+A''r'' \\ +\text{etc.}+\text{etc.} \end{array}\right\}\ x+\ldots\ldots+\left\{\begin{array}{l} Ar^n \\ +A'r'^n \\ +A''r''^n \\ +\text{etc.} \end{array}\right\}+\text{etc.}$$
$$=A+Bx+\ldots\ldots\ldots+Rx^n+\text{etc.}$$

auroit lieu aussi, $n$ étant un nombre quelconque : ce qui donne

$$R = A r^n + A' r'^n + A'' r''^n + \text{etc.}$$

La difficulté se réduit donc à décomposer la fraction rationnelle

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots + px^{m-1}}{1 - a'x - b'x^2 - c'x^3 - \ldots\ldots - q'x^m}$$

en une suite de fractions de la forme

$$\frac{A}{1 - rx} + \frac{A'}{1 - r'x} + \frac{A''}{1 - r''x} + \text{etc.}$$

les quantités $A$, $A'$, $A''$ etc. $r$, $r'$, $r''$ etc. devant être déterminées par la condition qu'en réunissant les fractions simples en une seule, les deux termes de la fraction réduite soient les mêmes que ceux de la fraction proposée.

Puisque les dénominateurs des fractions simples, multipliés entre eux, doivent reproduire le dénominateur de la fraction proposée, on déterminera ces facteurs en égalant à zéro le dénominateur

$$1 - a'x - b'x^2 - \ldots\ldots - q'x^m$$

et cherchant ensuite, d'après les méthodes précédemment exposées, les racines de cette équation. Reste donc à évaluer les numérateurs $A$, $A'$, $A''$ etc. : or ces quantités devant être telles que le numérateur de la fraction réduite soit le même que celui de la fraction proposée, on égalera entre eux les coefficiens des mêmes puissances de $x$, ce qui fournira un nombre $n$ d'équations du premier degré, au moyen desquelles on calculera les quantités $A$, $A'$, $A''$ etc.

Soient les fractions

$$\frac{1 - x}{1 - x - 2x^2} \text{ et } \frac{1 - x}{1 - 5x + 6x^2}$$

on trouvera que la première se décompose dans les deux suivantes

$$\frac{\frac{2}{3}}{1 + x} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - 2x}$$

et la seconde dans celles-ci

$$\frac{-1}{1 - 2x} + \frac{2}{1 - 3x}$$

Il est facile maintenant de trouver les termes généraux des séries que donnent les fractions précédentes. Pour la première, on feroit la somme des termes généraux des séries données par les fractions

$$\frac{\frac{2}{3}}{1+x} \text{ et } \frac{\frac{1}{3}}{1-2x}$$

et on trouveroit

$$\left[\tfrac{2}{3}(-1)^n + \tfrac{1}{3}\cdot 2^n\right] x^n = \frac{2^n \pm 2}{3} x^n$$

les signes + et — ayant respectivement lieu pour $n$ pair et impair. Faisant successivement

$$n = 0, = 1, = 2, = 3 \text{ etc.}$$

on aura la série

$$1 + 0x + 2x^2 + 2x^3 + 6x^4 + 10x^5 + 22x^6 + 42x^7 + \text{etc.}$$

Le terme général de la seconde fraction sera

$$2.3^n x^n - 2^n x^n = (2.3^n - 2^n) x^n$$

et posant successivement $n = 0, = 1, = 2$ etc. on aura la série

$$1 + 4x + 14x^2 + 46x^3 + 146x^4 + \text{etc.}$$

Prenons encore pour exemple la fraction

$$\frac{1+2x}{1-x-x^2}$$

les facteurs du dénominateur étant

$$1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) x \text{ et } 1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) x$$

on aura les fractions partielles

$$\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x} + \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x}$$

lesquelles donnent, pour le terme général de la série proposée

$$\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]x^n$$

d'où on déduiroit le développement en série de la proposée.

## *Décomposition des fractions rationnelles en fractions simples.*

On a vu que la recherche du terme général d'une suite récurrente ne présentoit plus de difficultés lorsque la fraction rationnelle génératrice étoit décomposée en fractions simples. Cette décomposition étant aussi d'un usage fréquent dans le *calcul intégral*, il ne sera pas inutile d'exposer les méthodes les plus simples pour l'effectuer.

Pour opérer cette décomposition, il faut :

1°. Que le numérateur $N$ soit d'une dimension moindre au moins d'une unité que le dénominateur $D$, ce qu'on peut toujours obtenir par la division ;

2°. Qu'on ait, par les méthodes précédemment exposées, trouvé les facteurs simples du dénominateur, ou les racines de ce dénominateur égalé à zéro

Soit donc la fraction rationnelle

$$\frac{N}{D}=\frac{a+a'x+a''x^2+\ldots\ldots+a^{(n-1)}x^{n-1}}{(x-a)(x-a')\ldots\ldots(x-a^{(n-1)})}$$

$a, a'\ldots\ldots a^{(n-1)}$ étant des racines réelles ou imaginaires, ce qui ne contrarie pas la généralité des résultats. On pourra supposer

$$\frac{N}{D}=\frac{A}{x-a}+\frac{A'}{x-a'}+\ldots\ldots+\frac{A^{(n-1)}}{x-a^{(n-1)}}$$

$A, A'\ldots\ldots A^{(n-1)}$ étant des coefficiens constans et indéterminés, fonctions de $a, a'\ldots\ldots a^{(n-1)}$, $a, a'\ldots\ldots a^{(n-1)}$. En effet, si on réduit toutes ces fractions au même dénominateur, qu'on en fasse la somme, ce qui fournit le moyen de faire disparoître le dénominateur $D$, et qu'on compare les coefficiens des mêmes puissances de $x$, on aura un nombre $n$ d'équations entre les $n$ indéterminées $A, A'\ldots\ldots A^{(n-1)}$, d'où résulte la possibilité de les évaluer toutes, et la légitimité de l'hypothèse précédente.

Soit, pour exemple, la fraction

$$\frac{1+x^2}{x-x^3}$$

dont les facteurs simples du dénominateur sont $x$, $1-x$, $1+x$. On posera donc

$$\frac{1+x^2}{x-x^3} = \frac{A}{x} + \frac{A'}{1-x} + \frac{A''}{1+x}$$

d'où on déduit l'identité

$$1+x^2 = A + (A'+A'')\,x + (-A+A'-A'')\,x^2$$

et comparant les coefficiens des mêmes puissances de $x$, il vient

$$A = 1\,,\ A' = 1\,,\ A'' = -1$$

donc

$$\frac{1+x^2}{x-x^3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}$$

Lorsque les facteurs du dénominateur seront inégaux entre eux, on pourra toujours, par la méthode précédente, déterminer les numérateurs des fractions simples; mais le calcul qu'elle exige devient d'autant plus long que le degré du dénominateur est plus élevé. Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, de déduire immédiatement de $N$ et de $D$ l'un quelconque des numérateurs $A$, $A'$ .... $A^{(n-1)}$, sans faire dépendre sa valeur de celles des dénominateurs précédens, comme il arrive dans la méthode que nous venons d'exposer.

Soit $x-a$ un des facteurs de $D$, en sorte que

$$D = (x-a)\,S$$

$S$ étant le produit des autres dénominateurs $x-a'$ ..... $x-a^{(n-1)}$. Si on représente par $\frac{P}{S}$ la somme des fractions particelles, moins la fraction $\frac{A}{x-a}$, on aura l'identité

$$\frac{N}{D} = \frac{A}{x-a} + \frac{P}{S} = \frac{AS+P(x-a)}{S(x-a)} = \frac{AS+P(x-a)}{D}$$

donc

$$N - AS = P(x-a)$$

Le numérateur $A$ doit donc être tel que $N-AS$ soit exactement divisible par $x-a$, puisque $P$ est une fonction entière de $x$; ce qui exige que la fonction $N-AS$ s'évanouisse

pour $x = a$. Cette condition sera satisfaite en prenant

$$A = \frac{(N)}{(S)}$$

$(N)$ et $(S)$ étant ce que déviennent $N$ et $S$ lorsqu'on fait $x = a$: d'où nous conclurons cette règle: *Pour déterminer un des numérateurs, il faudra dans N et S, écrire pour x la racine du facteur simple qui sert de dénominateur à la fraction partielle sur laquelle on opère.*

On a donc

$$A = \frac{a + a'a + a''a^2 + a'''a^3 + \text{etc.}}{(a-a')(a-a'')(a-a''')\text{ etc.}}$$

$$A' = \frac{a + a'a' + a''a'^2 + a'''a'^3 + \text{etc.}}{(a'-a)(a'-a'')(a'-a''')\text{ etc.}}$$

$$A''' = \frac{a + a'a'' + a''a''^2 + a'''a''^3 + \text{etc.}}{(a''-a)(a''-a')(a''-a''')\text{ etc.}}$$

etc.

Si dans l'exemple précédent $\frac{1+x^2}{x-x^3}$, où $N = 1 + x^2$ et $D = x - x^3$, on prend $x$ pour le facteur simple correspondant à $A$, on aura

$$S = 1 - x^2$$

et le numérateur $A$ de la fraction simple $\frac{A}{x}$ sera ce que devient $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ pour $x = 0$; ce qui donne

$$A = 1$$

Prenant ensuite le facteur simple $1 - x$, pour lequel $S = x + x^2$, on aura $A' = \frac{1+x^2}{x+x^2}$, ce qui donne pour $x = 1$

$$A' = 1$$

Enfin, pour le troisième facteur simple $1 + x$, à cause de $S = x - x^2$, on fera $x = -1$ dans $\frac{1+x^2}{x-x^2}$, ce qui donne

$$A'' = -1$$

Ainsi les trois fractions partielles dans lesquelles se décompose la proposée, sont comme on les a trouvées plus haut,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}$$

Si parmi les facteurs simples du dénominateur, plusieurs étaient égaux entre eux, la décomposition de la fraction ne pourroit plus avoir lieu dans la forme précédente : en effet, en revenant aux formules données pour l'évaluation des indéterminés $A, A' \ldots A^{(n-1)}$, on trouve que, dans l'hypothèse présente, plusieurs de ces numérateurs deviennent infinis, et qu'ils le deviendroient tous, si tous les facteurs simples du dénominateur étoient égaux entre eux. On peut d'ailleurs reconnoître l'illégitimité de la décomposition précédente dans l'hypothèse actuelle. Supposons en effet qu'on puisse poser

$$\frac{a+bx}{(x-c)^2} = \frac{A}{x-c} + \frac{A'}{x-c}$$

on aura donc

$$\frac{a+bx}{(x-c)^2} = \frac{(A+A')(x-c)}{(x-c)^2}$$

d'où on déduit les deux équations

$$A+A'=b\,;\quad -c(A+A')=a$$

résultats inadmissibles. En admettant la décomposition

$$\frac{1}{(x+a)^2} + \frac{A}{x+a} + \frac{A'}{x+a}$$

après avoir réduit au même dénominateur et comparé, on trouveroit

$$A+A'=0\,;\quad a(A+A')=1$$

relations qui ne peuvent avoir lieu en même temps.

Supposons donc que le dénominateur de la fraction $\frac{N}{D}$ renferme, outre les facteurs inégaux, pour lesquels on connoît le mode de composition, un nombre $n$ de facteurs du premier degré, réels et égaux : on pourra toujours supposer

$$\frac{N}{D} = \frac{P}{S} + \frac{K}{Q} \quad \ldots\ldots \quad (1$$

$S$ étant le produit de tous les facteurs inégaux, et $Q$ celui des facteurs égaux, en sorte que $D$ soit le produit des polynômes connus $Q$ et $S$, et les plus hauts exposans de $x$ dans $P$ et dans $K$, étant moindres au moins d'une unité que les plus hauts exposans de $x$ dans $S$ et dans $Q$. En effet l'équation (1) donne

$$\frac{N}{D} = \frac{PQ+KS}{QS} \quad \text{d'où} \quad N = PQ+KS$$

puisque, par supposition, $D = Q\,S$. Soit $D$ un polynome du degré $q$, et $S$ du degré $m$, $m$ étant $< q$; $N$ sera du degré $q-1$, et $Q$ du degré $q-m$; $P$ devra être du degré $m-1$, et $K$, du degré $q-m-1$; $P$ aura donc $m$ termes, et $m$ coefficients indéterminés, et $K$ en aura $q-m$. Le produit $P\,Q$ sera donc du degré $q-1$, ainsi que le produit $K\,S$, c'est-à-dire, que $P\,Q + K\,S$ sera du degré $q-1$, ou de même degré que $N$; ainsi $P\,Q + K\,S$ contiendra $q$ coefficiens indéterminés, donc $N$ ayant $q$ termes, on pourra former entre les coefficiens de $P\,Q + K\,S$, et ceux de $N$, des équations linéaires en nombre $q$, lesquelles serviront à déterminer les $q$ coefficiens de $P$ et de $K$, d'où résulte que la décomposition est toujours possible, et qu'on pourra poser

$$\frac{N}{D} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{A'}{x-\alpha'} + \frac{A''}{x-\alpha''} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{Px^{n-1} + P'x^{n-2} + \ldots\ldots + P^{(n-1)}}{(x-\zeta)^n}$$

dans l'hypothèse

$$D = (x-\alpha)(x-\alpha')(x-\alpha'')\text{ etc. }\ldots(x-\zeta)^n$$

La fraction

$$\frac{Px^{n-1} + P'x^{n-2} + \ldots\ldots + P^{(n-1)}}{(x-\zeta)^n}$$

par l'hypothèse $x - \zeta = z$, d'où $x = z + \zeta$, prend la forme

$$\frac{B}{z^n} + \frac{B'}{z^{n-1}} + \frac{B''}{z^{n-2}} + \ldots\ldots + \frac{B^{(n-1)}}{z}$$

les numérateurs $B$, $B'\ldots\ldots B^{(n-1)}$ étant indépendans de $x$: on pourra donc supposer

$$\frac{N}{D} = \frac{B}{(x-\zeta)^n} + \frac{B'}{(x-\zeta)^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{B^{(n-1)}}{x-\zeta} + \frac{P}{S}$$

$\frac{P}{S}$ représentant la somme des fractions partielles dues aux facteurs inégaux contenus dans $D$. Si on réduit au même dénominateur, on trouvera

$$N = S[B + B'(x-\zeta) + B''(x-\zeta)^2 + \ldots\ldots + B^{(n-1)}(x-\zeta)^{n-1}] + P(x-\zeta)^n$$

d'où l'on déduit

$$P = \frac{N - S\,[B + B'(x-\zeta) + B''(x-\zeta)^2 + \ldots + B^{(n-1)}(x-\zeta)^{n-1}]}{(x-\zeta)^n}$$

Or $P$ devant être une fonction entière, il faudra que le numérateur de son expression soit divisible exactement $n$ fois de suite par le dénominateur $x - \zeta$; ce qui exige que la partie $N - BS$ du numérateur devienne séparément nulle lorsque $x = \zeta$, donc

$$B = \frac{(N)}{(S)}$$

$(N)$ et $(S)$ désignant ce que deviennent $N$ et $S$ lorsqu'on y fait $x = \zeta$; conséquemment

$$N - BS = N - \frac{(N)}{(S)}\,S$$

quantité divisible par $x - \zeta$, et que nous représenterons par $N'(x-\zeta)$, en sorte que

$$P = \frac{N' - S'\,[B' + B''(x-\zeta) + \ldots + B^{(n-1)}(x-\zeta)^{n-2}]}{(x-\zeta)^{n-1}}$$

en effaçant le facteur commun $x - \zeta$. Faisant le même raisonnement, et supposant encore $x = \zeta$, on aura

$$B' = \frac{(N')}{(S)}$$

où $N$ et $S$ entre paranthèses rappellent la substitution $x = \zeta$; donc

$$N' - SB' = N' - \frac{(N')}{(S)}\,S$$

quantité divisible par $x - \zeta$, et que nous représenterons par $N''(x-\zeta)$, ce qui donnera

$$P = \frac{N'' - S\,[B'' + B'''(x-\zeta) + \ldots + B^{(n-1)}(x-\zeta)^{n-3}]}{(x-\zeta)^{n-2}}$$

On trouveroit de la même manière, dans l'hypothèse $x = \zeta$

$$B'' = \frac{(N'')}{(S)}$$

et conséquemment

$$P = \frac{N''' - S\,[B''' + B^{IV}(x-\zeta) + \ldots + B^{(n-1)}(x-\zeta)^{n-4}}{(x-\zeta)^{n-3}}$$

d'où on déduit pour $x = \zeta$

$$B''' = \frac{(N''')}{(S)}$$

et ainsi des autres numérateurs.

Prenons pour premier exemple la fraction

$$\frac{3}{(1-x)^2(1+x^4)}$$

pour laquelle les fractions partielles qui résultent du facteur carré $(1-x)^2$ du dénominateur sont

$$\frac{B}{(1-x)} + \frac{B'}{1-x}$$

On a ici

$$N = x^3, S = 1 + x^4 ; \text{ d'où } \frac{N}{S} = \frac{x^3}{1+x^4},$$

ce qui donne

$$B = \frac{(N)}{(S)} = \frac{1}{2}$$

pour $x = 1$; donc

$$N - \frac{(N)}{(S)} S = -\frac{1}{2} + x^3 - \frac{1}{2} x^4$$

et divisant par $1 - x$, conformément à la règle, il vient pour quotient

$$N' = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^3.$$

et conséquemment

$$\frac{N'}{S} = \frac{-1-x-x^2+x^3}{2(1+x^4)}$$

donc

$$B' = \frac{(N')}{(S)} = -\frac{1}{2}$$

pour $x = 1$. Les fractions dues au facteur $(1-x)^2$ sont donc

$$\frac{1}{2(1-x)^2} - \frac{1}{2(1-x)}$$

Soit encore la fraction

$$\frac{x^2}{(1-x)^3(1+x^2)}$$

pour laquelle les fractions partielles dues au facteur $(1-x)^3$, sont

$$\frac{B}{(1-x)^3} + \frac{B'}{(1-x)^2} + \frac{B''}{1-x}$$

Dans ce cas

$$N = x^2, \; S = 1 + x^2$$

on aura donc

$$\frac{N}{S} = \frac{x^2}{1+x^2} \text{ et } B = \tfrac{1}{2}$$

pour $x = 1$. On trouve ensuite

$$N' = \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}}{1-x} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x$$

ce qui donne

$$\frac{N'}{S} = \frac{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{1+x^2}; \text{ donc } B' = -\tfrac{1}{2}$$

on a

$$N'' = \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2}{1-x} = -\tfrac{1}{2}x$$

donc

$$\frac{N''}{S} = \frac{-x}{2(1+x^2)} \text{ et } B'' = -\tfrac{1}{4}$$

Ainsi les fractions partielles qui naissent du facteur cubique $(1-x)^3$ du dénominateur sont

$$\frac{1}{2(1-x)^3} - \frac{1}{2(1-x)^2} - \frac{1}{4(1-x)}$$

Nous conseillons à ceux de nos lecteurs qui voudroient compléter cette théorie, de consulter l'ouvrage d'*Euler*, ayant pour titre : *introductio in analysin infinitorum*, ou la traduction avec des notes par le citoyen *Labey*, l'un des professeurs de méchanique à l'Ecole polytechnique. Si nous n'avons pas donné au titre précédent toute l'étendue qu'il comporte, en ne considérant pas tous les cas qui peuvent se rencontrer, c'est parce que le calcul différentiel offre des méthodes beaucoup plus brieves pour évaluer les numérateurs des fractions partielles dues aux facteurs inégaux réels ou imaginaires, aux facteurs égaux, et aux facteurs doubles réels inégaux, et égaux, dans lesquels on peut décomposer le dénominateur de la fraction proposée, comme on peut le voir dans le traité de calcul intégral du *citoyen Lacroix*, et dans mes leçons d'analyse à l'Ecole Polytechnique, rédigées en conformité du programme arrêté par le conseil de perfectionnement de cette Ecole, imprimées et distribuées aux élèves pour leur servir d'ouvrage classique.

Si nous n'eussions pas craint de donner trop d'étendue à ces Notes déjà très-volumineuses, nous aurions fait voir que *le degré de l'équation finale résultante d'un nombre quelconque*

*quelconque d'équations complètes entre le même nombre d'inconnues, ne peut jamais excéder le produit des degrés de toutes ces équations, et qu'il est précisément égal à ce produit, lorsque les équations données sont les plus générales de leur degré.* Ce théorème qui est la généralisation de celui que nous avons donné, (page 323) a été démontré pour la première fois par Bezout, dans son livre *de l'Elimination*; il vient de l'être d'une manière aussi brève qu'élégante par le *citoyen Poisson*, Elève de l'Ecole polytechnique, qui a cet âge où les autres en sont encore aux élémens, déjà riche de connoissances, de conceptions et de vues, s'occupe de recherches délicates, avec un succès qui lui a valu l'estime des géomètres les plus distingués, et qui a fixé sur lui les regards de l'Institut : d'ailleurs cette démonstration trouvera sa place dans le n°. 11 du Journal de l'Ecole polytechnique.

Nous terminerons donc par la démonstration des deux théorêmes.

1°. *Trouver la somme des puissances m des racines d'une équation immédiatement en coefficiens de l'équation, et sans passer par les sommes des puissances inférieures.*

2°. *Connoissant les sommes des puissances des racines d'une équation, exprimer un coefficient quelconque de l'équation en sommes de ces puissances.*

Soit une équation d'un degré quelconque

$$x^m + A\,x^{m-1} + B\,x^{m-2} \ldots\ldots\ldots\ldots + V = 0$$

dont $a$, $b$, $c$, $d$, etc. sont les racines; on aura

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} = (x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,(x-d)\text{etc.}$$

et faisant $x =$ , puis multipliant par $z^m$, on obtiendra la transformée

$$1 + Az + Bz^2 + \ldots + z^m = (1-az)(1-bz)\,(1-cz)\,(1-dz)\text{ etc.}$$

et prenant de part et d'autre les logarithmes hyperboliques

$$l.\,(1 + A\,z + B\,z^2 + C\,z^3 + \ldots) = l.\,(1 - a\,z) +$$

$$l.\,(1 - b\,z) + l.\,(1 - c\,z) + l.\,(1 - d\,z)\text{ etc.}$$

Mais on a trouvé (page 400)

$$l.\,(1-b) = -b - \frac{b^2}{2} - \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} - \text{etc.}$$

donc faisant $b$ successivement $=az, =bz, =cz,$ etc., on aura

$$l.(1+Az+Bz^2+Cz^3+\text{etc...}) = -(a+b+c+d+\text{etc})\,z$$
$$-(a^2+b^2+c^2+d^2+\text{etc})\,\frac{z^2}{2}$$
$$-(a^3+b^3+c^3+d^3+\text{etc})\,\frac{z^3}{3}$$
$$-(a^4+b^4+c^4+d^4+\text{etc})\,\frac{z^4}{4}$$
$$\text{etc.}$$

posant donc

$$S_1 = a+b+c+d+\text{etc.}$$
$$S_2 = a^2+b^2+c^2+d^2+\text{etc.}$$
$$S_3 = a^3+b^3+c^3+d^3+\text{etc.}$$
$$S_4 = a^4+b^4+c^4+d^4+\text{etc.}$$

l'identité précédente devient

$$l.(1+Az+Bz^2+Cz^3+\text{etc.}) = -S_1 z - \frac{S_2}{2}z^2 - \frac{S_3}{3}z^3 - \frac{S_4}{4}z^4 - \text{etc}$$

mais

$$l.(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}$$

faisant donc dans ce développement

$$x = Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.}$$

et ordonnant par rapport aux puissances de $z$, on parvient à cette identité.

$$-S_1 z - \frac{S_2}{2}z^2 - \frac{S_3}{3}z^3 - \frac{S_4}{4}z^4 - \text{etc.}$$
$$= \left.\begin{array}{l} Az \\ +B \\ -\frac{A^2}{2} \end{array}\right\} z^2 \left.\begin{array}{l} +C \\ -\frac{2AB}{2} \\ +\frac{A^3}{3} \end{array}\right\} z^3 \left.\begin{array}{l} +D \\ -\frac{2AC}{2} \\ -\frac{B^2}{2} \\ +\frac{3A^2B}{3} \\ -\frac{A^4}{4} \end{array}\right\} z^4 + \text{etc.}$$

Et comparant les coefficiens des mêmes puissances de $z$

$$S_1 = -A$$
$$S_2 = -\tfrac{2}{1}B + \tfrac{2}{2}A^2$$
$$S_3 = -\tfrac{3}{1}C + \tfrac{3}{2}2AB - \tfrac{3}{3}A^3$$
$$S_4 = -\tfrac{4}{1}D + \tfrac{4}{2}(2AC + B^2) - \tfrac{4}{3}3A^2B + \tfrac{4}{4}A^4$$
$$S_5 = -\tfrac{5}{1}E + \tfrac{5}{2}(2AD + 2BC) - \tfrac{5}{3}(3A^2C + 3AB^2) + \tfrac{5}{4}4A^3B - \tfrac{5}{5}A^5.$$

L'avantage de ces formules sur celles que nous avons données (page 315) consiste en ce que dans les expressions précédentes des sommes successives des puissances des racines, il n'entre que les coefficiens de l'équation, en sorte que pour calculer l'une de ces sommes, on n'a pas besoin d'évaluer celles qui précèdent.

Nous passerons à la solution de la seconde question, et pour la résoudre, nous partirons de cette formule trouvée précédemment

$$l.(1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.}) = -S_1z - \frac{S_2}{2}z^2 - \frac{S_3}{3}z^3 - \frac{S_4}{4}z^4 - \text{etc}$$

qui n'est autre chose que

$$l.(1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.}) = le^{-S_1z - \frac{S_2}{2}z^2 - \frac{S_3}{3}z^3 - \frac{S_4}{4}z^4 - \text{etc.}}$$

en observant que $l\,e = 1$; et passant des logarithmes aux nombres, il vient

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.} = e^{-S_1z - \frac{S_2}{2}z^2 - \frac{S_3}{3}z^3 - \frac{S_4}{4}z^4 - \text{etc}}$$

Tout se réduit donc à développer le second membre suivant les puissances de $z$, au moyen de la formule

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

donnée (page 399) dans laquelle on fera

$$x = -S_1z - \frac{S_2}{2}z^2 - \frac{S_3}{3}z^3 - \frac{S_4}{4}z^4 - \text{etc.}$$

et après avoir ordonné le résultat suivant les puissances de $z$, on trouvera

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+\text{etc.}=1-S_1z-\frac{S_2}{2}\left\{z^2-\frac{S_3}{3}\right\}z^3+\text{etc}$$
$$+\frac{S_1^2}{2}\left\{+\frac{2S_1S_2}{2}\right\}$$
$$-\frac{S_1^3}{2.3}\Big\}$$

d'où on déduit

$$A=-S_1$$

$$B=-\frac{S_2}{2}+\frac{S_1^2}{1.2}$$

$$C=-\frac{S_3}{3}+2S_1\frac{S_2}{1.2}-\frac{S_1^3}{1.2.3}$$

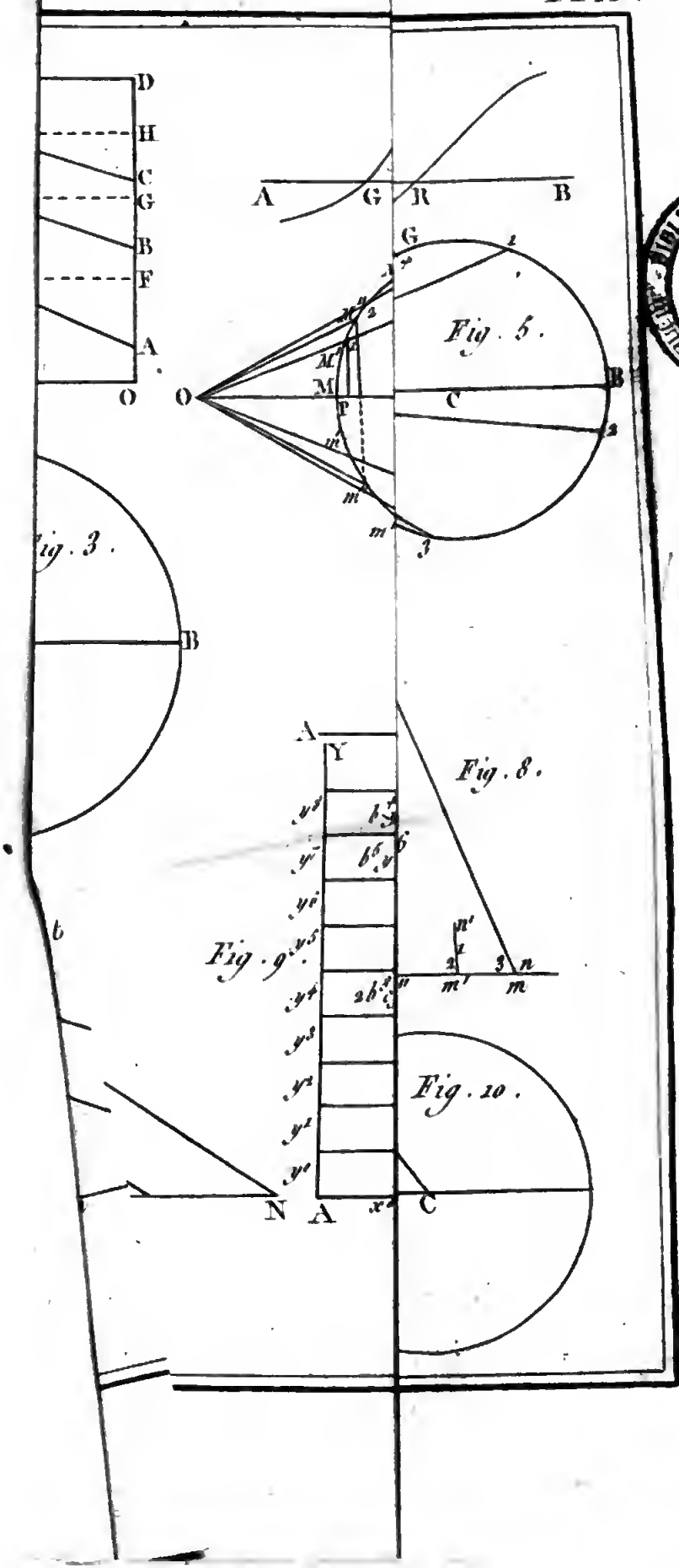
etc. etc.

*Waring* a donné, pour la solution de ce problème, une formule qu'il compose par les combinaisons, et qui s'accorde avec les précédentes: elle se trouve dans ses *Méditationes algebraicæ*, cap. I, probl. III, coroll., ainsi que dans son premier ouvrage de 1762.

Fin des Notes et des Additions.

616691

POU Pl.A.




BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EM. NUBILIARE NAPOLI

une
orde
ones
son